Diskret matematik IT ht 2004: Kryssuppgifter vecka 7

1. Hur många ”ord” kan man bilda av bokstäverna i FLAGGSTÅNGSKNOPPUPPSÄTTARE ?

2. Hur många permutationer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ av heltalen $1, 2, \ldots, n$ finns det med precis två stigande följder, dvs sådana att det finns ett $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sådant att $a_k > a_{k+1}$, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ och $a_{k+1} < a_{k+2} < \ldots < a_n$?

3. Innehåller grafen $(\{a, b, c, d, e, f\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}.\{b, d\}, \{b, e\}, \{b, f\}, \{c, f\}\})$ en Eulercykel?

Lösningar

1. Om man låtsas att ordets alla 26 bokstäver är olika så kan man bilda $26!$ olika ord. För att får rätt svar får man dividera med antal sätt på vilka de bokstäver som förekommer fler än en gång kan omordnas inbördes utan att ett givet ord ändras. Rätt svar blir alltså $26!/((2!)^2(3!)^3(4!))$.

2. För varje k gäller att antalet permutationer med två stigande följder sådana att $a_k > a_{k+1}$ är $\binom{n}{k} - 1$ ty detta är antalet sätt att välja ut k tal till vänster om ”fallet”, minus ett (eftersom om man väljer talen 1,2,...,k till vänster bildas inget fall).

   Svaret blir då

$$\sum_{k=1}^{n-1}(\binom{n}{k} - 1) = \sum_{k=0}^{n}(\binom{n}{k} - 1) = (\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}) - (n+1) = 2^n - n - 1.$$

3. Alla noder har jämna gradtal så det finns en Eulercykel. Ett exempel på en Eulercykel är $abeacfbda$.