

Diskret matematik IT ht 2004: Extra övningsuppgifter

1. Visa att det för alla positiva heltal n gäller att

$$1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

2. Visa att

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

3. Visa att

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

4. Visa att $n^2 > 2n + 1$ för alla heltal $n \geq 3$.

5. Visa att $7|13^n - 6^n$ för alla positiva heltal n .

6. Visa att $3|n^3 + 2n$ för alla positiva heltal n .

7. Visa att

$$\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

för alla heltal $n \geq 2$.

8. Låt a, b, c och d vara fyra heltal sådana att $a|b$ och $c|d$. Visa att $ac|bd$.

9. Visa att om a är ett heltal sådant att $2|a^2$ så gäller också att $4|a^2$.

10. Låt p vara ett primtal. Visa att om $2 \leq k \leq p$ så är $p! + k$ inte ett primtal.

11. Låt $n \geq 5$ vara ett udda heltal. Förklara varför de tre talen $n, n + 2$ och $n + 4$ inte alla kan vara primtal.

12. Beräkna $[146]^2$ i \mathbf{z}_{21} .

13. Ge ett exempel som visar att det inte nödvändigtvis är sant att om $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ så är $a \equiv b \pmod{n}$.