Matematik Chalmers

Tentamen i tma245a Matematik IT den 26 oktober 2001, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Robert Berman, tel. 0740-450922

1. (6p) Beskriv Euklides utökade algoritm för att till två heltal a och b finna $sgd(a, b)$ och två heltal u och v så att $au + bv = sgd(a, b)$. Argumentera för att algoritmen fungerar.

2. (6p) Låt S vara utfallsrummet till ett slumpförsök och låt P vara ett sannolikhetsmått på delmängderna till S. Vad betyder det att P är ett sannolikhetsmått? (dvs ange definitionen). Bevisa att om $A \subseteq B \subseteq S$ gäller att $P(A) \leq P(B)$ och att $P(A) \leq 1$ för alla $A \subseteq S$.

3. (6p) Låt a, b, c, d och n vara heltal. Visa att om $a \equiv b$ mod n och $c \equiv d$ mod n gäller att $a + c \equiv b + d$ mod n och $ac \equiv bd$ mod n.

4. (6p) Vilka av följande logiska argument är giltiga?

(a)
$$\begin{array}{r} p \to q \\ \sim p \\ \hline \therefore \sim q \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \sim (p \wedge q) \\ p \to r \\ q \to s \\ \sim r \\ \hline \therefore\ s \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ p \to r \\ q \to (s \vee t) \\ r \to w \\ s \to w \\ t \to w \\ \hline \therefore\ w \end{array}$$

5. (6p) Ishockeylagen A och B möts i en matchserie om bäst av fem matcher. Lag A är bättre än lag B och vinner varje match med sannolikheten 2/3 oberoende av hur de andra matcherna slutar. Vad är sannolikheten att lag A vinner matchserien? Vad blir svaret om man istället spelar i bäst av sju matcher?

6. (7p) För vilka heltal n gäller det att

$$35 | n^{25} + n^{13} + n + 1?$$

7. (6p) Lisa och Pelle spelar följande spel: Lisa lägger antingen 20 kr eller 40 kr i ett kuvert. Pelle, som inte får se hur mycket Lisa lägger i kuvertet, gissar sedan vilket av de två beloppen som Lisa har lagt där. Om Pelle gissar rätt får han pengarna i kuvertet och om han gissar fel får han betala den till synes rimliga summan 30 kr till Lisa. Antag nu att Lisa låter slumpen avgöra hur mycket hon lägger i kuvertet på så sätt att hon med sannolikheten 7/12 lägger 20 kr i kuvertet och med sannolikheten 5/12 lägger 40 kr i kuvertet. Antag också att Pelle har en strategi som gör att han med sannolikheten p gissar på 20 kr och med sannolkheten $q = 1 - p$ gissar 40 kr. Låt X vara Lisas nettovinst av spelet och beräkna väntevärdet av X. För vem av de två är spelet gynnsamt?

8. (7p) Låt p vara ett primtal. Visa att $(p-1)! \equiv -1 \mod p$. (Detta resultat är känt som Wilsons sats.)

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Teoriuppgift.

2. Teoriuppgift.

3. Teoriuppgift.

4. Argumentet (a) är ogiltigt. Tag t.ex. $p = F$ och $q = S$. Argument (b) är giltigt, ty om slutsatsen är falsk betyder detta att $s = F$ och om hypoteserna ska vara sanna krävs att även $r = F$ så för att de två implikationerna ska vara sanna krävs att även p och q är falska vilket tvingar det första argumentet att vara falskt.

   Argument (c) är också giltigt, ty om $w = F$ och hypoteserna ska vara sanna följer att r, s och t alla är falska vilket tvingar även p och q till atta vara falska vilket i sin tur tvingar första argumentet att vara falskt.

5. Låt den stokastiska variabeln X vara antalet matcher som lag A vinner. I det första fallet har X en $Bin(5, 2/3)$-fördelning och lag A vinner om och endast om $X \geq 3$. Vi söker alltså

$$P(X \geq 3) = \binom{5}{3}(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^2 + \binom{5}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3})^5$$

$$= \frac{10 \cdot 8 + 5 \cdot 16 + 32}{243} = \frac{192}{243} = \frac{64}{81}.$$

I fallet med bäst av sju matcher blir X en $Bin(7, 2/3)$-fördelad skokastisk variabel och vi söker

$$P(X \geq 4) = \binom{7}{4}(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^3 + \binom{7}{5}(\frac{2}{3})^5(\frac{1}{3})^2 + \binom{7}{6}(\frac{2}{3})^6(\frac{1}{3}) + (\frac{2}{3})^7$$

$$= \frac{35 \cdot 16 + 21 \cdot 32 + 7 \cdot 64 + 128}{2187} = \frac{1808}{2187}.$$

6. Sätt $f(n) = n^{25} + n^{13} + n + 1$. Eftersom $35 = 5 \cdot 7$ och 5 och 7 är relativt prima gäller det $35|f(n)$ om och endast om $5|f(n)$ och $7|f(n)$. Vi vill alltså veta för vilka värden på n som $f(n) \equiv 0$ modulo 5 såväl som modulo 7.

   När vi räknar i $\mathbf{Z}_5$ räcker det om vi betraktar $n = 0, 1, 2, 3, 4$. För $n = 0$ har vi $f(n) = 1 \neq 0$. För övriga värden utnyttjar vi Eulers sats som säger att $n^4 = 1$. Således blir $f(n) = n + n + n + 1 = 3n + 1$ och $3n + 1 = 0 \Leftrightarrow 3n = 4 \Leftrightarrow (2 \cdot 3)n = 2 \cdot 4)$, dvs $n = 3$.

   I $\mathbf{Z}_7$ behöver vi bara betrakta $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. För $n = 0$ gäller $f(n) = 1$ och för övriga n utnyttjar vi återigen Eulers sats som säger att $n^6 = 1$ så att $f(n) = n+n+n+1 = 3n+1 = 0 \Leftrightarrow 3n = 6 \Leftrightarrow n = 2$.

   Vi har kommit fram till att $35|f(n)$ om och endast om

$$\begin{cases} n \equiv 3 \bmod 5 \\ n \equiv 2 \bmod 7 \end{cases}$$

   Enligt kinesiska restsatsen är detta ekvationssystem lösbart och om n_0 är en lösning så ges den allmänna lösningen av $n = n_0 + 35k$, $k \in \mathbf{Z}$. Man kan med blotta ögat se att $n_0 = 23$ fungerar så det slutliga svaret är att $n = 23 + 35k$ där k kan vara vilket heltal som helst.

7. Det gäller att $X = -20$ med sannolikheten $7p/12$, att $X = -40$ med sannolikheten $5q/12$ och att $X = 30$ med sannolikheten $5p/12 + 7q/12$. (Vi har här antagit att Pelles gissningar är oberoende av vad Lisa stoppar i kuvertet; ett uppenbarligen korrekt antagande eftersom Pelle inte vet vad Lisa lägger i.) Vi får

$$\mathbf{E}[X] = 30(\frac{5p}{12} + \frac{7q}{12}) - 20\frac{7p}{12} - 40\frac{5q}{12} = \frac{10p}{12} + \frac{10q}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

där den näst sista likheten följer av att $p + q = 1$. Vi ser att Lisas förväntade vinst dels inte beror av vilken strategi Pelle använder, dels att den är positiv, dvs spelet är gynnsamt för Lisa.

8. Vi vill visa att $(p-1)! = -1$ om vi räknar i $\mathbf{Z}_p$. Eftersom alla talen $1, 2, \ldots, p-1$ är relativt prima med p har de alla en unik invers i $\mathbf{Z}_p$. Dessutom gäller för talen $2, 3, \ldots, p-2$ att dessa inte är inverser till sig själva, ty om så vore fallet skulle det för att sådant tal k gälla att $k^2 = 1$ i $\mathbf{Z}_p$, dvs $p | k^2 - 1$, dvs $p | (k+1)(k-1)$ och eftersom p är ett primtal skulle $p | k+1$ eller $p | k-1$ vilket tvingar k till att vara antingen 1 eller $p-1$. Således gäller att i produkten $(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1)$ multipliceras varje tal utom 1 och $p-1$ med sin invers och vi får att $(p-1)! = p - 1 = -1$ i $\mathbf{Z}_p$.