Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT, del 1, den 21 augusti 2002, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Erik Broman, tel. 0740-450922

1. (6p) Låt a, b och c vara heltal. Visa att $a|b$ och $a|c$ om och endast om $a|nb + mc$ för alla heltal m och n.

2. (6p) Visa att det finns oändligt många primtal.

3. (6p) Formulera binomialsatsen och avgör vad koefficienten framför $x^{12}y^5$ är i utvecklingen av $(3x^4 + y)^8$.

4. (6p) Vilka av följande par av logiska formler är ekvivalenta? Bevisa eller ge motexempel:

   (a) $\sim (p \wedge q)$ och $(\sim p) \vee (\sim q)$,

   (b) $p \rightarrow q$ och $q \rightarrow p$,

   (c) $(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow r$ och $p \rightarrow r$.

5. (6p) Pelle säger till Lisa att han har förmågan att med god precision förutsäga utfallet av en slantsingling med ett symmetriskt mynt. Lisa är skeptisk och begär att Pelle demonstrerar sin förmåga. Det visar sig att på tio försök får Pelle rätt sju gånger. Vad var sannoliheten att Pelle skulle lyckas minst så bra om han bara gissade? Om du vore i Lisas kläder, skulle du då ta detta som intäkt för att Pelle verkligen har en viss profetisk förmåga?

6. (7p) Rita grafen $G = G(V, E)$ där $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ och $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, f\}, \{f, g\}, \{a, h\}, \{h, i\}\}$.

   En av grafens nio noder väljs på måfå. Vad är väntevärdet av avståndet mellan den valda noden och a? (Avståndet mellan två noder i en graf ges av antalet kanter i en kortaste väg mellan de två noderna.)

7. (6p) Josefin handlade frukt. Äpplena kostade 3 kronor styck, melonerna 10 kronor och plommonen 50 öre. Josefin köpte minst en av varje sort coh totalt 100 frukter och alltihop kostade precis 100 kronor. Hur många frukter av varje sort köpte Josefin?

8. (7p) Vilka positiva heltal kan skrivas som differensen mellan två kvadrater. Formulera en sats och bevisa den.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Teoriuppgift.

2. Teoriuppgift.

3. Binomialsatsen säger att om $n \geq 1$ är ett heltal så gäller för alla x och y att

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Satsen följer av observationen att för att få en term av typen $x^{n-k}y^k$ i utvecklingen av $(x+y)^n$ ska man välja y ur precis k av de n parenteserna och x ur de övriga. Detta kan ske på precis $\binom{n}{k}$ olika sätt.

I det fall som vi är speciellt intresserade av i denna uppgift får vi att

$$(3x^4 + y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (3x^4)^{8-k} y^k.$$

En $x^{12}y^5$-term uppstår då $k = 5$ och koefficienten framför blir alltså $\binom{8}{5} \cdot 3^3 = 504$.

4. Om Pelle bara gissar har varje gissning sannolikheten 1/2 att lyckas. Eftersom slantsinglingarna är oberoende betyder detta att antalet rätt som Pelle får, säg X, är en stokastisk variabel som är binomialfördelad med parametrar 10 och 1/2. Därför gäller att

$$P(X \geq 7) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2}^{10-k} (1 - \frac{1}{2})^k = \frac{1}{2^{10}}(120 + 45 + 10 + 1) = \frac{11}{128}.$$

Nu är ju 11/128 knappt en tiondel så det verkar betydligt mer rimligt att tro att Pelle bara hade lite tur snarare än att han verkligen äger en viss förmåga att skåda in i framtiden.

(Detta är ett exempel på ett statistiskt test; man vill undersöka om någon tänkt “effekt” verkligen existerar och gör detta genom att skräddarsy ett slumpförsök som man lätt kan analysera sannolikhetsteoretiskt under antagandet att den tänkta effekten inte finns. Ett under detta antagande “normalt” resultat tolkas som att effekten inte finns medan ett på rätt sätt “extremt” resultat tolkas som att effekten finns.)

5. Grafen G är ett träd med a som “knutpunkt” och “armarna” ab, $acde$, afg och ahi.

   Låt nu den stokastiska variabeln X beteckna avståndet från a till en i G på måfå vald nod. Det gäller att $X = 0$ då a väljs, $X = 1$ då b, c, f eller h väljs, $X = 2$ då d, g eller i väljs och $X = 3$ då e väljs. Således blir $P(X = 0) = 1/9$, $P(X = 1) = 4/9$, $P(X = 2) = 3/9$ och $P(X = 3) = 1/9$ så att

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{9}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = \frac{13}{9}.$$

6. Låt x vara antalet äpplen, y antalet meloner och z antalet plommon. Enligt uppgift har vi de två ekvationerna:

$$3x + 10y + 0.5z = 100$$

$$x + y + z = 100.$$

   Om vi löser ut z ur den första ekvationen får vi $z = 200 - 6x - 20y$ som instoppat i den andra ekvationen ger den diofantiska ekvationen $5x + 19y = 100$. Denna ekvation är lösbar ty $sgd(5, 19) = 1$. Man ser genom inspektion att en lösning till ekvationen $5x + 19y = 1$ är $x = 4, y = -1$ varför $x = 400, y = -100$ är en lösning till $5x + 19y = 100$. Den allmänna lösningen är då $x = 400 - 19n, y = -100 + 5n$, $n \in \mathbf{Z}$. För z gäller då att $z = 200-6(400-19n)-20(-100+5n) = -200+14n$. Det enda värdet på n som gör både x, y och z positiva är $n = 21$ som ger oss $x = 1$, $y = 5$ och $z = 94$. Josefin köpte alltså ett äpple, fem meloner och nittiofyra plommon.

7. Sats: Om n är ett positivt heltal gäller att n kan skrivas som differensen mellan två kvadrater om och endast om n är udda eller $4|n$.

   För att bevisa detta observerar vi att då $n = x^2 - y^2$ där x och y är heltal gäller enligt konjugatregeln att $n = (x+y)(x-y)$. Oberoende av vad x och y är gäller det uppenbarligen att antingen är både $x+y$ och $x-y$ udda eller så båda jämna. I det första fallet blir $(x+y)(x-y)$ udda och i det andra fallet gäller att $4|(x+y)(x-y)$. Detta visar "endast om"-delen. För att klara den andra delen ska vi specificera x och y i de fall då n är udda eller $4|n$. Men om n är udda, sätt $x=(n+1)/2$ och $y=x-1$. Då får vi $n=(x+y)(x-y)=n \cdot 1=n$. Om $4|n$ sätt $x=n/4+1$ och $y=n/4-1$.