Matematik Chalmers

Tentamen i tma245 Matematik IT, del 1, den 20 augusti 2003, kl. 14.15-18.15

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Hanna Martinsson, tel. 0740-459022

1. (7p)
   (a) Visa att om p är ett primtal och a är ett godtyckligt heltal gäller antingen att $p|a$ eller att $sgd(p, a) = 1$.
   (b) Visa att om p är ett primtal och a och b är heltal sådana att $p|ab$ gäller det att $p|a$ eller $p|b$.
   (c) Visa genom att ge ett motexempel att slutsatsen i (b) inte håller om man tar bort kravet på att p är ett primtal.

2. (6p) Det finns en sats som säger att om X och Y är två oberoende stokastiska variabler gäller att $\mathbf{V}ar[X + Y] = \mathbf{V}ar[X] + \mathbf{V}ar[Y]$. Om X och Y är beroende gäller det i allmänhet inte att $\mathbf{V}ar[X + Y] = \mathbf{V}ar[X] + \mathbf{V}ar[Y]$. Ge ett exempel som visar detta och peka på varför beviset av nämnda sats inte fungerar i detta fall.

3. (6p) En relation R på en mängd A kallas, som bekant,
   - *reflexiv* om $\forall x : xRx$,
   - *symmetrisk* om $\forall x, y : xRy \Rightarrow yRx$,
   - *transitiv* om $\forall x, y, z : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

   Ge exempel på en relation som är

   (a) såväl reflexiv, symmetrisk och transitiv (dvs en ekvivalensrelation),
   (b) transitiv, men varken reflexiv eller symmetrisk,
   (c) symmetrisk, men varken reflexiv eller transitiv.

4. (6p) Låt $A_1, A_2, \ldots$ vara mängder sådana att det för alla positiva heltal n gäller att $|A_n| = 3n - 2$ och

$$\left| A_n \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right| = n - 1.$$

Visa att det för alla n gäller att

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big| = n^2.$$

5. (6p) Funktionen f har intervallet $[0, \infty)$ som definitionsmängd och ges av

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Visa att f är injektiv och bestäm målmängden så att f också blir surjektiv. Beräkna också inversen till f.

6. (6p) I en något annorlunda stafett ingick i varje lag tre löpare och det sprangs tio sträckor (på 3 km). Inom laget fick man fördela sträckorna som man ville med restriktionen att varje deltagare skulle springa minst två sträckor. Ett lag utgjordes av Lisa, Pelle och Kajsa. Lisa tog i genomsnitt 11 minuter på sig för sina sträckor, Pelle tog 12 minuter på sig och Kajsa 15 minuter. Lagets sammanlagda tid blev 2 timmar och 1 minut. Hur många sträckor sparng var och en?

7. (6p) Rita grafen $G = (V, E)$ där $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ och $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, f\}, \{f, g\}, \{a, h\}, \{h, i\}\}$.

   En av grafens nio noder väljs på måfå. Vad är väntevärdet av avståndet mellan den valda noden och a? (Avståndet mellan två noder i en graf ges av antalet kanter i en kortaste väg mellan de två noderna.)

8. (7p) Vilka positiva heltal kan skrivas som differensen mellan två kvadrater. Formulera en sats och bevisa den.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. (a) Delarna till p är 1 och p så om p inte delar a är 1 den enda gemensamma delaren till p och a varför $sgd(p, a) = 1$.

   (b) Om $p|a$ finns inget att visa så antag att p inte delar a. Enligt (a) gäller då att $sgd(p, a) = 1$ varför det enligt Euklides utökade algoritm finns heltal u och v så att $au + pv = 1$. Multiplicera ekvationen med b och få $abu + bpv = b$. Det gäller trivialt att $p|bpv$ och enligt förutsättning att $p|abu$ och därmed att $p|abu + bpv$, dvs $p|b$.

(c) Det gäller till exempel att $6|2 \cdot 3$, men inte att $6|2$ eller $6|3$.

2. Låt X vara vilken stokastisk variabel som helst för vilken $\mathbf{V}ar[X] > 0$ och låt $Y = X$. Då gäller att $\mathbf{V}ar[X+Y] = \mathbf{V}ar[2X] = 4\mathbf{V}ar[X]$ medan $\mathbf{V}ar[X] + \mathbf{V}ar[Y] = 2\mathbf{V}ar[X]$. Haken i beviset är att om inte X och Y är oberoende så gäller normalt inte att $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$.

3. (a) Till exempel $=$ (På vilken mängd som helst.)
   (b) Till exempel $<$ (t.ex. på $\mathbf{Z}$.)
   (c) Till exempel $\neq$ (t.ex. på $\mathbf{Z}$.)

4. Tydligen är $|A_1| = 3 \cdot 1 - 2 = 1 = 1^2$ så resultatet man ombeds visa gäller åtminstone för $n = 1$. Välj nu n godtyckligt och antag att $|\bigcup_{k=1}^n A_k| = n^2$. Då gäller att

$$|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k| = |A_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} A_k|$$

$$= |A_{n+1}| + |\bigcup_{k=1}^{n} A_k| - |A_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k|$$

$$= 3(n+1) - 2 + n^2 - (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Det önskade resultatet följer nu av induktionsprincipen.

5. Att f är injektiv följer av att om $f(x) = f(y)$, dvs $1/(1+x^2) = 1/(1+y^2)$ gäller $x^2 = y^2$ och eftersom f bara är definierad på den positiva halvaxeln medför detta att $x = y$. Värdemängden till f består av alla y för vilka det finns ett $x \in [0, \infty)$ sådant att $f(x) = y$, dvs för vilka det finns en positiv lösning till ekvationen $y = 1/(1+x^2)$. Sådan lösning finns om och endast om $y \in (0, 1]$ och blir då

$$x = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

För att f ska bli surjektiv ska vi alltså låta $(0, 1]$ vara målmängd. Inversen fås som just lösningen till ekvationen vi nyss löste, dvs

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}.$$

6. Låt L vara antalet sträckor som Lisa sprang, och låt P och K beteckan motsvarande för Pelle respektive Kajsa. För dessa ges i uppgiften de två ekvationerna
$$L + P + K = 10$$
och
$$11L + 12P + 15K = 121.$$
Från den första ekvationen får man att $L = 10 - P - K$ och genom att sätta in det i den andra ekvationen fås den diofantiska ekvationen
$$P + 4K = 11.$$
En lösning till denna är $(P, K) = (3, 2)$ varför den allmänna lösningen blir $(P, K) = (3 - 4n, 2 + n), n \in \mathbf{Z}$, så att $(L, P, K,) = (5 + 3n, 3 - 4n, 2 + n)$. Den enda lösningen som uppfyller uppgiftens villkor är den som fås för $n = 0$, så svaret är att Lisa sprang 5 sträckor, Pelle 3 straäckor och Kajsa 2 sträckor.

7. Grafen G är ett träd med a som "knutpunkt" och "armarna" ab, $acde$, afg och ahi.

   Låt nu den stokastiska variabeln X beteckna avståndet från a till en i G på måfå vald nod. Det gäller att $X = 0$ då a väljs, $X = 1$ då b, c, f eller h väljs, $X = 2$ då d, g eller i väljs och $X = 3$ då e väljs. Således blir $P(X = 0) = 1/9$, $P(X = 1) = 4/9$, $P(X = 2) = 3/9$ och $P(X = 3) = 1/9$ så att
$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{9}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) = \frac{13}{9}.$$

8. Sats: Om n är ett positivt heltal gäller att n kan skrivas som differensen mellan två kvadrater om och endast om n är udda eller $4|n$.

   För att bevisa detta observerar vi att då $n = x^2 - y^2$ där x och y är heltal gäller enligt konjugatregeln att $n = (x+y)(x-y)$. Oberoende av vad x och y är gäller det uppenbarligen att antingen är både $x + y$ och $x-y$ udda eller så båda jämna. I det första fallet blir $(x+y)(x-y)$ udda och i det andra fallet gäller att $4|(x + y)(x - y)$. Detta visar "endast om"-delen. För att klara den andra delen ska vi specificera x och y i de fall då n är udda eller $4|n$. Men om n är udda, sätt $x = (n + 1)/2$ och $y = x - 1$. Då får vi $n = (x + y)(x - y) = n \cdot 1 = n$. Om $4|n$ sätt $x = n/4 + 1$ och $y = n/4 - 1$.