Matematik Chalmers

Tentamen i TMV210 och MAD100 Diskret matematik den 21 oktober 2005, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Elisabeth Wulcan, tel. 0739-779268

1. (6p) Beräkna $sgd(a, b)$, avgör om det existerar en invers till $[a]$ i $\mathbf{Z}_b$ och beräkna i så fall denna, då

   (a) $a = 1001$ och $b = 748$,

   (b) $a = 317$ och $b = 70$,

   (c) $a = 31$ och $b = 47$.

2. (6p) Ange de positiva lösningarna till den diofantiska ekvationen

$$12x + 21y = 186.$$

3. (8p) Poker spelas med en vanlig kortlek med 52 kort; tretton valörer i fyra olika färger. En pokerhand har fem kort. Hur många pokerhänder finns det

   (a) totalt?

   (b) som innehåller ett fyrtal (dvs fyra kort i samma valör)?

   (c) som innehåller en kåk (dvs tre kort i en valör och två kort i en annan valör)?

   (d) som innehåller ett tvåpar (dvs två kort i en valör, två kort i en annan valör och ett kort i en tredje)?

4. (6p) Följden $f_1, f_2, f_3, \ldots$ är definierad av att $f_1 = 1$ och att för $n \geq 2$ gäller att $f_n = (1 + \sqrt{f_{n-1}})^2$. Visa att det för alla n gäller att $f_n = n^2$.

5. (6p) Vilket är det minsta positiva jämna heltal som vid division med 7 ger resten 2, vid division med 13 ger resten 4 och vid division med 19 ger resten 5?

6. (6p) Visa att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}.$$

7. (6p) Antag att du har tillgång till två sorters tegelstenar, sådana av storlek 1×1 och sådana av storlek 1×2. Du ska fylla en rad med mått $1 \times n$, där n är ett positivt heltal, med tegelstenar. Låt f_n vara antalet sätt som detta kan ske på. Ge ett rekursivt uttryck för f_n.

8. (6p) Visa att det för alla positiva heltal n gäller att

$$31 | 6^{10n+1} + 5^{11n-1}.$$

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Med hjälp av Euklides algoritm beräknar man $sgd(a, b)$ till 11 i (a) och till 1 i (b) och (c). Således finns den sökta inversen endast i fall (b) och (c). Denna beräknas i förekommande fall med Euklides algoritm baklänges och man får att $[317]^{-1} = [37]^{-1} = [-17] = [53]$ i $\mathbf{Z}_{70}$ och att $[31]^{-1} = [-3] = [44]$ i $\mathbf{Z}_{47}$.

2. Förkorta först ekvationen till
$$4x + 7y = 62.$$
Eftersom $4\cdot2+7\cdot(-1) = 1$ gäller att $4\cdot124+7\cdot(-62) = 62$ så att $(124, -62)$ är en lösning. Den allmänna lösningen blir då $(x, y) = (124 - 7n, -62 + 4n), n \in \mathbf{Z}$. För att få positiva lösningar krävs att $124 - 7n > 0$ och $-62 + 4n > 0$, dvs att $n = 16$ eller $n = 17$. De positiva lösningarna är alltså $(x, y) = (5, 6)$ och $(x, y) = (12, 2)$.

3. (a) $\binom{52}{5}$.
   (b) $13 \cdot 48$, dvs antalet sätt att välja fyrtalsvalör gånger antalet sätt att välja det femte kortet.
   (c) $13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$,
   (d) $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44$.

4. Eftersom $f_1 = 1 = 1^2$ gäller det önskade resultatet tydligen då $n = 1$, så antag att det gäller för $n = r$ där r är ett godtyckligt valt positivt heltal. Då gäller att $f_{r+1} = (1 + \sqrt{f_r})^2 = (1 + \sqrt{r^2})^2 = (r + 1)^2$ dvs det önskade resultatet gäller även i fallet $n = r + 1$. Det vi ville visa följer nu av induktionsprincipen.

5. Talet vi söker, kalla det x, uppfyller följande kongruensrelationer:
$$\begin{cases} x \equiv 2 \text{ mod } 7 \\ x \equiv 4 \text{ mod } 13 \\ x \equiv 5 \text{ mod } 19 \end{cases}$$
Den första raden säger att $x = 2 + 7k$ för något heltal k som insatt i den andra raden ger att $2 + 7k = 4$ i $\mathbf{Z}_{13}$, dvs $7k = 2$ så att $k = 4$ i $\mathbf{Z}_{13}$, dvs $k = 4 + 13m$ för något heltal m. Alltså gäller att $x = 2 + 7(4 + 13m) = 30 + 91m$. Insatt i den tredje raden ger detta att $30 + 91m = 5$ i $\mathbf{Z}_{19}$ som blir $-4m = -6$, dvs $4m = 6$ som ger $m = 30 = 11$ i $\mathbf{Z}_{19}$ dvs $m = 11 + 19n$ för något heltal n. Detta ger $x = 30 + 91(11 + 19n) = 1031 + 1729n$. Eftersom x också skulle vara jämnt får vi den minsta positiva lösningen för $n = 1$ och den blir $x = 2760$.

6. Vi använder induktion: Formeln är sann då n=1 ty båda leden blir då $1/2$. Antag nu att formeln är sann då $n = r$ där r är ett godtyckligt valt positivt heltal. Då gäller att
$$\sum_{k=1}^{r+1} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{r^2 + 4r + 6}{2^r} + \frac{(r + 1)^2}{2^{r+1}}$$

$$= 6 - \frac{2r^2 + 8r + 12 - r^2 - 2r - 1}{2^{r+1}} = 6 - \frac{r^2 + 6r + 11}{2^{r+1}}$$

$$= 6\frac{(r+1)^2 + 4(r+1) + 6}{2^{r+1}}$$

som önskat.

7. Uppenbarligen är $f_1 = 1$ och $f_2 = 2$. För $n \geq 3$ gäller att fn är summan av antalet sätt mam kan göra på som börjar med en 1×1-sten och antalet sätt som börjar med en 1×2-sten. Detta ger $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

8. Vi ska visa att $6^{10n+1} + 5^{11n-1} = 0$ i $\mathbf{Z}_{31}$. Inversen till 6 i $\mathbf{Z}_{31}$ är 26=-5 så om vi förlänger uttrycket med $(-5)^{10n+1}$ ser vi att har att visa att $1 + (-5)^{10n+1} \cdot 5^{11n-1} = 0$, dvs
$$5^{21n} = 1$$
Men $5^3 = 125 = 1$ i $\mathbf{Z}_{31}$, så $5^{21n} = 1^{7n} = 1$, så saken är klar.