Matematik Chalmers

Tentamen i tmv200 Diskret matematik IT den 16 december 2005, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Oscar Marmon, tel. 0739-779268

1. (8p)
   (a) Hur många "ord" kan man bilda av bokstäverna i ordet FISKA?
   (b) Hur många "ord" kan bilda av bokstäverna i ordet FOTBOLL?
   (c) Hur många "ord" kan bilda av bokstäverna i ordet FOTBOLL om man inte får skriva två L i rad?
   (d) Hur många "ord" kan bilda av bokstäverna i ordet FOTBOLL om ingen bokstav får förekomma två gånger i rad?
2. (6p) Ge fullständig lösning till den diofantiska ekvationen
$$26x + 17y = 8.$$
3. (6p) Visa att det för alla positiva heltal n gäller att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$
4. (6p) Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 2\}$.
   (a) Hur många fuktioner finns med A som definitionsmängd och B som målmängd?
   (b) Finns det någon injektiv funktion med A som definitionsmängd och B som målmängd? Ange i så fall en sådan.
   (c) Finns det någon surjektiv funktion med A som definitionsmängd och B som målmängd? Ange i så fall en sådan.
5. (6p) I en urna finns drygt 3000 kulor. Om man delar upp dessa i högar om 106 kulor får man 18 kulor över, medan man om man men delar upp dem i högar om 94 kulor får 2 kulor över. Hur många kulor är det i urnan?
6. (6p) Finns det några positiva heltal n sådana att $7|3n^{12} + 5n^7 + 15n^6 + 2n + 9$?
7. (6p) För $n = 1, 2, 3, \ldots$, låt f_n beteckna antalet följder av n tal där varje tal är 1, 2 eller 3 och där det ingenstans förekommer två ettor i rad. Ange ett rekursivt uttryck för f_n.
8. (6p) Visa att det för varje positivt heltal n gäller att $43|7^{10n+1} + 6^{11n-1}$.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. I del (a) ger alla permutationer av de fem bokstäverna upphov till olika ord varför svaret är $5! = 120$. I del (b) har vi två O och två L och totalt 7 bokstäver, så svaret blir $7!/(2!)^2 = 1260$.

   Svaret i (c) får man lättast som svaret i (b) minus de ord där man **har** två L i rad. Antalet ord med två L i rad är $6 \cdot 5!/2 = 360$ så svaret blir $1260 - 360 = 900$.

   Del (d): Låt U vara mängden av ord som kan bildas av FOTBOLL, A mängden av sådana ord med två L i rad och B mängden av sådana ord med två O i rad. Vi söker $|U \setminus (A \cup B)| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B| = 1260 - 360 - 360 + |A \cap B| = 540 + 20 \cdot 3! = 660$.

2. Notera först att 26 och 17 är relativt prima. Man ser raskt att en lösning är $(x, y) = (-1, 2)$ varför, pga att $sgd(26, 17) = 1$, den allmänna lösningen är $(x, y) = (-1 + 17n, 2 - 26n)$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. För $n = 1$ påstår den givna formeln att
$$\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2+3}{4 \cdot 3},$$
   vilket uppenbarligen är sant. Fixera nu ett godtyckligt positivt heltal m och antag att formeln gäller då $n = m$. Om vi kan visa att formeln då också gäller då $n = m + 1$ följer det önskade resultatet av induktionsprincipen. Vi kontrollerar:
$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{3^k} + \frac{m+1}{3^{m+1}}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{2m+3}{4 \cdot 3^m} + \frac{m+1}{3^{m+1}} = \frac{3}{4} - \frac{3(2m+3) - 4(m+1)}{4 \cdot 3^{m+1}}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{2m+5}{3^{m+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2(m+1)+3}{3^{m+1}}$$
   som önskat.

4. Varje element i definitionsmängden kan ha två olika funktionsvärden, varför det finns $2^3 = 8$ olika funktioner. Eftersom definitionsmängden innehåller fler element än målmängden så finns det ingen injektiv funktion, då ju minst två element måste ha samma funktionsvärde. Däremot finns det surjektiva funktioner, till exempel funktionen f given av $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ och $f(3) = 1$.

5. Låt x vara antalet kulor i urnan. Det gäller tydligen att $x \equiv 18$ mod 106 och $x \equiv 2$ mod 94. Eftersom $sgd(106, 94) = 2$ kan man inte använda kinesiska restatsen direkt på detta problem, men det är av uppgiften klart att x är ett jämnt tal och om man låter $y = x/2$ får man $y \equiv 9$ mod 53 och $y \equiv 1$ mod 47.

   Den första av dessa ekvationer ger att $y = 9 + 53k$ för något heltal k, vilket insatt i den andra ekvationen ger att $9 + 53k = 1$ i $\mathbf{Z}_{47}$, dvs $6k = -8$ i $\mathbf{Z}_{47}$. Inversen till 6 modulo 47 är 8, så detta ger $k = -64 = 30$ i $\mathbf{Z}_{47}$, dvs $k = 30 + 47m$ för något heltal m. Sammantaget får vi $y = 9 + 53(30 + 47m) = 1599 + 2491m$ och därmed att $x = 3198 + 4982m$. Vi ser nu att det sökta talet måste vara det som ges av $m = 0$. Svaret är alltså att det är 3198 kulor i urnan.

6. Frågan är om det finns något heltal n så att det aktuella polynomet evaluerat för detta n är 0 i $\mathbf{Z}_7$. Vi behöver då bara kontrollera detta för $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. För $n = 0$ blir polynomet 9, som inte är 0 i $\mathbf{Z}_7$. För övriga intressanta värden på n gäller enligt Eulers sats att $n^6 = 1$ i $\mathbf{Z}_7$ så polynomet förenklar sig till $3 + 5n + 15 + 2n + 2 = 6$. Svaret är alltså: Nej, det finns inga sådana n.

7. Det gäller att $f_1 = 3$ och att $f_2 = 8$ (de åtta följderna 12,13,21,22,23,31,32 och 33). För $n \geq 3$ gäller att antalet godkända följder av längd n är summan av antalet följder som börjar på 3, antalet följder som börjar på 2, antalet följder som börjar på 12 och antalet följder som börjar på 13. Dessa fyra olika starter kan följas av vilken godkänd följd som helst av lagom längd och de ger upphov till olika följder. Vi får alltså att f_n ges av att $f_1 = 3$, $f_2 = 8$ och för $n \geq 3$:

$$f_n = 2f_{n-1} + 2f_{n-2}.$$

8. Det gäller att visa att $7^{10n+1} + 6^{11n-1} = 0$ i $\mathbf{Z}_{43}$. Inversen till 7 är -6 så genom att förlänga uttrycket med $(-6)^{10n+1} = -6^{10n+1}$ (ty $10n + 1$ är udda) ser vi att vi har att visa att

$$1 - 6^{10n+1}6^{11n-1} = 0$$

i $\mathbf{Z}_{43}$,dvs

$$6^{21n} = 1.$$

Men $6^3 = 36 \cdot 6 = (-7) \cdot 6 = -42 = 1$, så $6^{21n} = (6^3)^{7n} = 1$ i $\mathbf{Z}_{43}$, som önskat.