Matematik Chalmers

Tentamen i TMV210, TMV200 och MAD100 Diskret matematik den 10 januari 2006, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: xxx, tel. 0762-721860

1. (6p) Beskriv Euklides utökade algoritm för att till två heltal a och b finna $sgd(a, b)$ och två heltal u och v sådana att $au+bv = sgd(a, b)$. Förklara varför algoritmen fungerar.

2. (6p) Ungefär 2500 enkronor staplas på ett bord. När de läggs i högar om 13 mynt blir det 2 mynt över och när de läggs i högar om 21 mynt blir det 14 mynt över. Hur många mynt är det totalt?

3. (6p) Om man har en spann som rymmer 28 liter och en spann som rymmer 19 liter, hur beter man sig för att med hjälp av dessa mäta upp exakt 7 liter vatten?

4. (8p) Låt $A = \{1, 2, 3\}$.

   (a) Hur många funktioner finns det som har A både som definitionsmängd och målmängd?

   (b) Hur många funktioner från A till A är injektiva?

   (c) Hur många funktioner från A till A är surjektiva?

   (d) Svaren i (b) och (c) har ett speciellt förhållande till varandra. Vilket och varför?

5. (6p) Följden $f_0, f_1, f_2, \ldots$ är given av att $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ och för $n \geq 2$: $f_n = 5f_{n-1} - 6f_{n-2}$. Visa att det för alla n gäller att $f_n = 3^n - 2^n$.

6. (6p) På hur många sätt kan man fördela 13 apelsiner och 10 äpplen bland 6 barn om varje barn ska minst en apelsin och minst ett äpple?

7. (6p) Låt U vara en mängd med minst två element och låt F vara familjen av alla delmängder till U. Relationen $\sim$ på F är given av att $A \sim B$ då $|A| = |B|$. Är relationen $\sim$ en ekvivalensrelation? Är $\sim$ en partiell ordning?

8. (6p) Följden $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ges av att $f_0 = 1$ och rekursionen $f_n = a + bf_{n-1}$ mod p, där a, b är heltal, p är ett primtal och $a < p$ och $b < p$. (dvs f_n är resten av heltalsdivision av $a + bf_{n-1}$ med p). (Denna teknik används ibland för att generera ”slumptal”.) Om $f_1 = 20$, $f_2 = 9$ och $f_3 = 38$, vad är då a, b och p?

/Johan Jonasson

Lösningar

1. Antag att $a > b$. Skriv med hjälp av divisionsalgoritmen $a = q_1b + r_1$. Upprepa med b och r_1 och få $b = q_2r_1 + r_2$. Forsätt på detta sätt genom att dividera den förra resten med den nya resten: $r_1 = q_3r_2 + r_3$, $r_2 = q_4r_3 + r_4$, etc, ända tills du får en rest som är 0. Då är $sdg(a, b)$ den sista nollskilda resten.

Algoritmen fungerar för att det i varje steg, k, gäller att $sgd(r_{k-1}, r_k) = sgd(q_{k+1}r_k + r_{k+1}, r_k) = sgd(r_{k+1}, r_k)$.

2. Vi vill hitta ett heltal x som är kongruent med 2 modulo 13 och kongruent med 14 modulo 21. Det andra villkoret ger att $x = 14 + 21k$ för något heltal k. I den första ekvationen ger detta i sin tur att $14 + 21k \equiv 2 \bmod 13$, dvs $8k \equiv 1 \bmod 13$. Inversen till 8 modulo 13 är 5, vilket medför att $k \equiv 5$, dvs $k = 5 + 13m$ för något heltal m. Sammantaget får vi att $x = 14 + 21(5 + 13m) = 119 + 273m$, för ett heltal m. Den lösning som ligger närmast 2500 är den som svarar mot $m = 9$ och den blir $x = 2576$. Det rör sig alltså om 2576 mynt.

3. Lös den diofantiska ekavtionen
$$28x + 19y = 7.$$
Med hjälp av Euklides algoritm ser man snabbt att $28 \cdot (-2) + 19 \cdot 3 = 1$, varför $(x, y) = (-14, 21)$ är en lösning. Den allmänna lösningen är då $(x, y) = (-14 + 19n, 21 - 28n)$, $n \in \mathbf{Z}$. Den "enklaste" lösningen är $(x, y) = (5, -7)$. Man kan alltså lösa uppgiften genom att man fyller 28-litershinken 5 gånger och varje gång den blir full tömmer den med hjälp av 19-litershinken.

4. (a) $3^3 = 27$.

   (b) Välj först $f(1)$, sedan $f(2)$ i $A \setminus \{f(1)\}$, sedan $f(3)$ som det enda kvaravarande värdet. Detta ger $3! = 6$ olika valmöjligheter och det finns alltså 6 olika injektiva funktioner.

(c) och (d) Eftersom målmängden innehåller lika många element som definitionsmängden blir en funktion surjektiv om och endast om den är injektiv, så det finns 6 surjektiva funktioner. Svaren i (b) och (c) är alltså lika, vilket alltid är fallet då definitionsmängd och målmängd är ändliga och innehåller lika många element.

5. Det gäller $3^0 - 2^0 = 0$ och $3^1 - 2^1 = 1$ så den påstådda likheten gäller då $n = 1$ och $n = 2$. Fixera nu ett godtyckligt heltal $m \geq 2$ och antag att det för all heltal $n < m$ gäller att $f_n = 3^n - 2^n$. Då gäller att
$$\begin{aligned} f_m = 5f_{m-1} - 6f_{m-2} &= 5(3^{m-1} - 2^{m-1}) - 6(3^{m-2} - 2^{m-2}) \\ &= (5-2)3^{m-1} - (5-3)2^{m-1} = 3^m - 2^m. \end{aligned}$$
Det vi ville visa följer nu av induktionsprincipen.

6. Om man börjar med att ge alla barn varsitt äpple och varsin apelsin, inser man att problemet är detsamma som att fördela 7 apelsiner och 4 äpplen utan bivillkor. Antalet sätt att fördela 7 apelsiner är antalet sätt att placera ut fem väggar för att avskilja de olika barnens portioner, bland de sju apelsinerna. Detta kan ske på $\binom{12}{5}$ sätt. På samma sätt ser man äpplena kan fördelas på $\binom{9}{5}$ sätt, så enligt multiplikationspricnipen är svaret
$$\binom{12}{5}\binom{9}{5}.$$

7. Relationen är inte en partiell ordning, ty det finns delmängder som är olika men ändå innehåller lika många element. Däremot är $\sim$ en ekvivalensrelation, ty alla mängder innehåller lika många element som sig själva, om A innehåller lika måmga element som B så innehåller B lika många element som A o.s.v.

8. Tydligen gäller att $a + b \equiv 20$ mod p, $a + 20b \equiv 9$ mod p och $a + 9b \equiv 38$ mod p. Vid räkning mod p gäller då att $a = 20 - b$, som insatt i ekvation 2 och 3 ger att $19b = -11$ och $8b = 18$. Förläng dessa med 8 repsektive 19 och få att

   $$172b \equiv -88 \text{ mod } p$$

   och

   $$172b \equiv 342 \text{ mod } p,$$

   dvs $430 \equiv 0$. Alltså gäller att $p|430$ och eftersom p är ett primtal som är minst 39, ser vi att $p = 43$. Genom att lösa till exempel $8b \equiv 18$ mod 43 ser vi nu att $b = 13$ och därmed blir $a = 7$.