Matematik Chalmers

Tentamen i TMV200, TMV210, TMA245 del 1 och MAD100 Diskret matematik den 22 april 2006, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: David Rydh/Henrik Seppänen, tel. 0762-721860

1. (8p)
   (a) Hur många “ord” kan man bilda av bokstäverna i ordet KÅLROT?
   (b) Hur många “ord” kan bilda av bokstäverna i ordet KRATTA?
   (c) Hur många “ord” kan bilda av bokstäverna i ordet KRATTA om man inte får skriva två T i rad?
   (d) Hur många “ord” kan bilda av bokstäverna i ordet KRATTA om ingen bokstav får förekomma två gånger i rad?

2. (6p) Vad blir $8^{20} + 13^{41}$ i $\mathbf{Z}_{25}$?

3. (6p) Beskriv Euklides utökade algoritm för att till två heltal a och b finna $sgd(a, b)$ och två heltal u och v sådana att $au + bv = sgd(a, b)$. Förklara varför algoritmen fungerar.

4. (6p) Robert, Malin och Oskar ska dela tretton identiska karameller mellan sig? På hur många sätt kan de fördela karamellerna? Hur många sätt blir det om man ställer som villkor ingen av dem ska bli helt utan karameller?

5. (6p) Visa att det för alla positiva heltal n gäller att
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n}.$$

6. (6p) Låt R vara den relation på mängden $\mathbf{Z}_+$ av positiva heltal som ges av att
$$aRb \Leftrightarrow ab = n^2 \text{ för något heltal } n.$$
   Avgör om R är en ekvivalensrelation och/eller en partiell ordning.

7. (6p) Visa att det för alla positiva heltal n gäller att
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1.$$

8. (6p) Låt p vara ett primtal.

(a) Visa att det för alla heltal k med $1 \leq k < p$ gäller att $p|\binom{p}{k}$.

(b) Visa att $(n+1)^p \equiv n^p + 1 \bmod p$ för alla heltal n. (Tips: Använd t.ex. binomialsatsen och del (a).)

(c) Använd till exempel del (b) till att visa att $n^p \equiv n \bmod p$.

Observera att det går bra att lösa en deluppgift även om man inte klarat den innan.

/Johan Jonasson

Lösningar

1. I del (a) ger alla permutationer av de sex bokstäverna upphov till olika ord varför svaret är $6! = 720$. I del (b) har vi två A och två T och totalt 6 bokstäver, så svaret blir $6!/(2!)^2 = 180$.

   Svaret i (c) får man lättast som svaret i (b) minus de ord där man **har** två T i rad. Antalet ord med två T i rad är $5 \cdot 4!/2 = 60$ så svaret blir $180 - 60 = 120$.

   Del (d): Låt U vara mängden av ord som kan bildas av KRATTA, A mängden av sådana ord med två A i rad och B mängden av sådana ord med två T i rad. Vi söker $|U \setminus (A \cup B)| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B| = 180 - 60 - 60 + |A \cap B| = 60 + 12 \cdot 2! = 84$.

2. Eftersom $\Phi(25) = 5 \cdot 4 = 20$ gäller enligt Eulers sats att $a^{20} = 1$ i $\mathbf{Z}_{25}$ för alla a med $sgd(a, 25) = 1$. Nu är ju både 8 och 13 relativt prima 25, så den första termen blir 1 och den andra termen blir $13 \cdot (13^{20})^2 = 13$ varför den sökta summan blir 14 i $\mathbf{Z}_{25}$.

3. Antag att $a > b$. Skriv med hjälp av divisionsalgoritmen $a = q_1 b + r_1$. Upprepa med b och r_1 och få $b = q_2 r_1 + r_2$. Forsätt på detta sätt genom att dividera den förra resten med den nya resten: $r_1 = q_3 r_2 + r_3$, $r_2 = q_4 r_3 + r_4$, etc, ända tills du får en rest som är 0. Då är $sdg(a, b)$ den sista nollskilda resten.

   Algoritmen fungerar för att det i varje steg, k, gäller att $sgd(r_{k-1}, r_k) = sgd(q_{k+1} r_k + r_{k+1}, r_k) = sgd(r_{k+1}, r_k)$.

4. Om man lägger ut de 13 karamellerna i rad och fördelar dem genom att lägga ut två stickor som avdelare mellan Roberts, Malins, respektive Oskars högar, ser man att man har 15 föremål som ska positioneras. Man kan välja positioner till de två stickorna på $\binom{15}{2} = 105$ olika sätt. De kan alltså fördela karamellerna på 105 olika sätt.

Med bivillkoret ska de två stickorna placeras ut bland de 12 mellanrummen mellan karamellerna och de får inte placeras bägge i samma mellanrum. Antalet sätt blir alltså $\binom{12}{2} = 66$.

5. Vi använder induktion: Formeln är sann då n=1 ty båda leden blir då $1/2$. Antag nu att formeln är sann då $n = r$ där r är ett godtyckligt valt positivt heltal. Då gäller att

$$\sum_{k=1}^{r+1} \frac{k^2}{2^k} = 6 - \frac{r^2 + 4r + 6}{2^r} + \frac{(r+1)^2}{2^{r+1}}$$

$$= 6 - \frac{2r^2 + 8r + 12 - r^2 - 2r - 1}{2^{r+1}} = 6 - \frac{r^2 + 6r + 11}{2^{r+1}}$$

$$= 6 - \frac{(r+1)^2 + 4(r+1) + 6}{2^{r+1}}$$

som önskat.

6. Relationen R är inte en partiell ordning ty exempelvis gäller att $2R8$, $8R2$ och $8 \neq 2$. Dock gäller att R är en ekvivalensrelation: Att R är reflexiv följer av att $a \cdot a = a^2$ och a^2 är ett heltal. Symmetri följer av att om ab är ett heltal så är även ba ett heltal. Transitivitet: Antag att $ab = n^2$ och $bc = m^2$ för två heltal n och m. Då är

$$ac = \frac{(ab)(bc)}{b^2} = (\frac{nm}{b})^2.$$

Med andra ord är ac kvadraten av ett rationellt tal. Men ac är ju självt ett heltal, varför nm/b måste vara ett heltal. Orsaken till detta är att om p/q är ett rationellt tal med p och q relativt prima och $(p/q)^2 = k$ för något heltal k så gäller att $p^2 = q^2k$, dvs $q^2|p^2$, dvs $q = 1$.

7. Vi använder induktion. I fallet $n = 1$ är både höger- och vänsterledet 1. Antag nu att formeln är sann då $n = m$ för ett godtyckligt valt positivt heltal m. Då gäller att

$$\sum_{k=1}^{m+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{m} k \cdot k! + (m+1)(m+1)! = (m+1)! - 1 + (m+1)(m+1)!$$

$$= (m+2)(m+1)! - 1$$

där den andra likheten följer av induktionsantagandet. Det vi ville visa följer nu av induktionsprincipen.

8. Eftersom $\binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!}$ är ett heltal gäller att

$$k!|p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-k+1).$$

Men $k!$ är ju en produkt av faktorer som alla är relativt prima p så $k!$ och p är relativt prima. Därför måste gälla att

$$k!|(p-1) \cdot \ldots \cdot (p-k+1).$$

Detta visar del (a).

För del (b) använder vi binomialsatsen:

$$(n+1)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} n^k.$$

Enligt del (a) är alla termer utom den första och den sista delbara med p, varför hela uttrycket vid räkning modulo p blir $n^p + 1$ som önskat.

I del (c) använder vi induktion. Det vi ska visa är sant då $n = 1$, så antag att $n^p \equiv n \bmod p$ för ett givet n. Då gäller att

$$(n+1)^p \equiv n^p + 1 \equiv n + 1$$

precis som önskat. (Här följde den första likheten av del (b) och den andra av induktionsantagandet.)