Matematik Chalmers

**Tentamen till kurserna TMV200, TMV210, TMA245 (del A) och MAD100, den 22 augusti 2006, kl. 14.00-18.00**

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: xxx, tel. 0739-779268

1. (6p) Vilka av följande logiska formler är tautologier?
   (a) $(P \to Q) \vee (Q \to P)$,
   (b) $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$,
   (c) $(P \wedge Q \wedge \neg R) \to (R \to \neg(P \wedge Q))$.

2. (6p) Ange de positiva lösningarna till den diofantiska ekvationen
$$12x + 21y = 186.$$

3. (6p) Ungefär 2500 enkronor staplas på ett bord. När de läggs i högar om 13 mynt blir det 2 mynt över och när de läggs i högar om 21 mynt blir det 14 mynt över. Hur många mynt är det totalt?

4. (6p) Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$ och låt $R$ vara en delmängd till $A \times A$ sådan att $(1, 2) \in R$. Vilka övriga element i $A \times A$ *måste* $R$ innehålla för att vara en ekvivalensrelation?

5. (7p) Till sitt födelsedagskalas köpte Kalle tablettaskar för 7 kronor styck, klubbor för 3 kronor styck och chokladkakor för 10 kronor styck. Han köpte sammanlagt 26 saker och betalade sammanlagt 175 kronor. Hur många av varje sort köpte han? (Obs. att det kan finnas flera olika lösningar.)

6. (7p) Visa att det för alla heltal $n \geq 2$ gäller att
$$\frac{1}{2}n^{3/2} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n^{3/2}.$$

7. (6p) Låt $a$ och $b$ vara två positiva heltal. Visa att det antingen gäller att $sgd(a + b, a - b) = sgd(a, b)$ eller $sgd(a + b, a - b) = 2sgd(a, b)$.

8. (6p) Visa att det för varje positivt heltal $n$ gäller att $43 | 7^{10n+1} + 6^{11n-1}$.

**Lösningar**

1. Alla tre uttrycken är tautologier:

   (a):Om $P \to Q$ är falsk så är $Q$ falsk vilket automatiskt gör $Q \to P$ sann.

   (b): Detta kan verifieras med en sanningstabell. Alternativt observerar man att (b) är ekvivalent med $\neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q$ som är ekvivalent med $\neg P \vee (P \wedge \neg Q) \vee Q$ som uppenbarligen är sann oavsett sanningsvärdena på $P$ och $Q$.

   (c): Detta inses lättast genom att observera att vänsterledet framför huvudimplikationen är sant bara om $P$ och $Q$ är sanna och $R$ är falsk. Det gäller då bara att inse att högerledet också är sant. Men högerledet är då av formen "falsk medför falsk" vilket är sant.

2. Förkorta först ekvationen till
$$4x + 7y = 62.$$
   Eftersom $4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) = 1$ gäller att $4 \cdot 124 + 7 \cdot (-62) = 62$ så att $(124, -62)$ är en lösning. Den allmänna lösningen blir då $(x, y) = (124 - 7n, -62 + 4n), n \in \mathbf{Z}$. För att få positiva lösningar krävs att $124 - 7n > 0$ och $-62 + 4n > 0$, dvs att $n = 16$ eller $n = 17$. De positiva lösningarna är alltså $(x, y) = (5, 6)$ och $(x, y) = (12, 2)$.

3. Vi vill hitta ett heltal $x$ som är kongruent med 2 modulo 13 och kongruent med 14 modulo 21. Det andra villkoret ger att $x = 14 + 21k$ för något heltal $k$. I den första ekvationen ger detta i sin tur att $14 + 21k \equiv 2$ mod 13, dvs $8k \equiv 1$ mod 13. Inversen till 8 modulo 13 är 5, vilket medför att $k \equiv 5$, dvs $k = 5 + 13m$ för något heltal $m$. Sammantaget får vi att $x = 14 + 21(5 + 13m) = 119 + 273m$, för ett heltal $m$. Den lösning som ligger närmast 2500 är den som svarar mot $m = 9$ och den blir $x = 2576$. Det rör sig alltså om 2576 mynt.

4. Eftersom $R$ ska vara symmetrisk måste även $(2, 1) \in R$. För att $R$ nu ska vara transitiv krävs då även att $(1, 1) \in R$ och att $(2, 2) \in R$. För att $R$ ska vara reflexiv krävs nu också att $(3, 3)$ och $(4, 4)$ finns i $R$. Eftersom relationen $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ är en ekvivalensrelation finns det inte några fler element som *måste* vara med för att $R$ ska bli en ekvivalensrelation.

5. Låt $x$ vara antalet tablettaskar, $y$ antalet klubbor och $z$ antalet chokladkakor som Kalle köpte. Då ger uppgiften oss de två ekvationerna
$$7x + 3y + 10z = 175$$

och

$$x + y + z = 26.$$

Den andra ekvationen talar om att $z = 26 - x - y$ och genom att stoppa in detta i den första ekvationen följer att

$$7x + 3y + 10(26 - x - y) = 175$$

dvs

$$3x + 7y = 85.$$

Detta är en lösbar diofantisk ekvation. Eftersom $3 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 = 1$ ges en lösning av $(x_0, y_0) = (85 \cdot (-2), 85 \cdot 1) = (-170, 85)$ så den allmänna lösningen blir $(x, y) = (-170+7n, 85-3n)$ där $n$ kan vara vilket heltal som helst. För $z$ får vi $z = 26-x-y = 26-(-170+7n)-(85-3n) = 111-4n$. Nu gäller det att bestämma för vilka $n$ som både $x$, $y$ och $z$ är positiva. I detta fall gäller detta då $n = 25$, $n = 26$ eller $n = 27$. I det första fallet får vi $(x, y, z) = (5, 10, 11))$,i det andra fallet får vi $(x, y, z) = (12, 7, 7))$ och i det tredje fallet $(x, y, x) = (19, 4, 3)$. Kalle kan alltså ha köpt 5 tablettaskar, 10 klubbor och 11 chokladkakor eller så kan han ha köpt 12 tablettaskar, 7 klubbor och 7 chokladkakor eller så kan han ha köpt 19 tablettaskar, 4 klubbor och 3 chokladkakor.

6. Den högra olikheten är följer raskt av att alla termerna i summan är högst $\sqrt{n}$ med strikt olikhet för alla utom den sista termen. Eftersom det finns totalt $n$ stycken termer får vi att

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n\sqrt{n} = n^{3/2}.$$

För den vänstra olikheten använder vi induktion: Olikheten vi ska visa gäller uppenbarligen för $n = 2$ ty högerledet är då $1 + \sqrt{2}$ och vänsterledet är $\frac{1}{2}2^{3/2} = \sqrt{2}$. Antag nu att den önskade olikheten gäller då $n = m$ där $m$ är ett godtyckligt valt heltal större än eller lika med 2. Det gäller då att

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{k} + \sqrt{m+1} > \frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1}.$$

Det gäller nu för oss att visa att det sista uttrycket är minst lika stort som $\frac{1}{2}(m+1)^{3/2}$. För att göra det går det lika bra att visa att

$$(\frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1})^2 \geq (\frac{1}{2}(m+1)^{3/2})^2$$

dvs

$$m^3 + 4(m+1) + 4m^{3/2}\sqrt{m+1} \geq (m+1)^3.$$

Men det högra uttrycket är $m^3 + 3m^2 + 3m + 1$ medan det vänstra är större än $m^3 + 4m + 4 + 4m^{3/2}\sqrt{m}$ som är lika med $m^3 + 4m^2 + 4m + 4$ som i sin tur är större än det högra uttrycket. Saken är klar.

7. Skriv $d = sgd(a, b)$ och $c = sgd(a - b, a + b)$. Eftersom $c$ är en gemensam delare till $a + b$ och $a - b$ gäller dels att $c|(a + b) + (a - b)$, dvs $c|2a$, dels att $c|(a + b) - (a - b)$, dvs $c|2b$. Därför gäller att $c|sgd(2a, 2b)$, dvs $c|2d$.

   Å andra sidan gäller ju att eftersom $d|a$ och $d|b$ så följer att $d|a+b$ och $d|a-b$ så att $d|c$.

   Vi har alltså att $d|c$ och $c|2d$ ur vilket det följer att $c = d$ eller $c = 2d$ som vi ville.

8. Det gäller att visa att $7^{10n+1} + 6^{11n-1} = 0$ i $\mathbf{Z}_{43}$. Inversen till 7 är -6 så genom att förlänga uttrycket med $(-6)^{10n+1} = -6^{10n+1}$ (ty $10n + 1$ är udda) ser vi att vi har att visa att

$$1 - 6^{10n+1}6^{11n-1} = 0$$

   i $\mathbf{Z}_{43}$,dvs

$$6^{21n} = 1.$$

   Men $6^3 = 36 \cdot 6 = (-7) \cdot 6 = -42 = 1$, så $6^{21n} = (6^3)^{7n} = 1$ i $\mathbf{Z}_{43}$, som önskat.