Diskret matematik IT ht 2005: Kryssuppgifter vecka 2

1. Låt $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ges av

$$f(n) = \begin{cases} n+3 \text{ då } n \text{ är udda} \\ n-5 \text{ då } n \text{ är jämnt} \end{cases}$$

Visa att f är bijektiv och beräkna f^{-1}.

2. Funktionen $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ är given av

$$f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 45x - 30.$$

Bestäm det längsta intervallet $I \subseteq [1,3]$ sådant att restriktionen av f till I är injektiv. Ange också $f(I)$.

3. Låt $A = \{1,2,3,4\}$ och låt R vara en delmängd till $A \times A$ sådan att $(1,2) \in R$. Vilka övriga element i $A \times A$ *måste* R innehålla för att vara en ekvivalensrelation?

Lösningar

1. Vi observerar först att då n är udda är $f(n) = n+3$ jämnt medan om n är jämnt så är $f(n) = 2n-5$ som är udda, så det är inte möjligt att $f(n) = f(m)$ om n är udda och m är jämnt. Att två olika udda tal har olika funktionsvärden liksom att två jämna tal har olika funktionsvärden är uppenbart. Sammantaget visar detta att f är injektiv. För att visa att f är surjektiv, tag $y \in \mathbb{Z}$. Om y är jämnt har ekvationen $f(n) = y$ lösningen $n = y-3$ (som är udda) och om y är udda så har ekvationen $f(n) = y$ lösningen $n = y+5$ (som är jämnt). Detta visar att f är surjektiv och dessutom att

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y-3 \text{ då } y \text{ är jämnt} \\ y+5 \text{ då } y \text{ är udda} \end{cases}$$

2. Funktionen f är ett tredjegradspolynom med positiv x^3- koeeficient, så vi vet att om vi ser f som definierad på hela den reella linjen att antingen är f strängt växande på hela den reella linjen eller så finns två tal a och b, $a < b$, så att $f'(a) = f'(b) = 0$ och då är f strängt växande på $[-\infty, a]$, strängt avtagande på $[a,b]$ och strängt växande på $[b, \infty)$. Det gäller att

$$f'(x) = 12x^2 - 48x + 45$$

Sätter vi denna till 0 får vi

$$x^2 - 4x + \frac{15}{4} = 0$$

som har lösningarna $x = \frac{3}{2}$ och $x = \frac{5}{2}$. Därmed vet vi att f är strängt växande på $[1, \frac{3}{2}]$, strängt avtagande på $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ och strängt växande på $[\frac{5}{2}, 3]$. Det längsta intervallet f är injektiv på är alltså $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$. För att beräkna $f(I)$ beräknar vi $f(\frac{3}{2}) = -3$ och $f(\frac{5}{2}) = -5$. Vi ser att $f(I) = [-5, -3]$.

3. Eftersom R ska vara symmetrisk måste även $(2,1) \in R$. För att R nu ska vara transitiv krävs då även att $(1,1) \in R$ och att $(2,2) \in R$. För att R ska vara reflexiv krävs nu också att $(3,3)$ och $(4,4)$ finns i R. Eftersom relationen $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ är en ekvivalensrelation finns det inte några fler element som *måste* vara med för att R ska bli en ekvivalensrelation.