Diskret matematik IT ht 2005: Kryssuppgifter vecka 3

1. Låt $A = [0,1] \times [0,1]$ och låt R vara en relation på A som ges av att $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)$ då $x_1 \leq x_2$ och $y_1 \leq y_2$. Visa att R är en partiell ordning och ange, om möjligt, största och minsta element.

2. Visa att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

3. Visa att det för alla heltal $n \geq 56$ gäller att det finns två positiva heltal m och k sådana att $n = 5m + 11k$.

Lösningar

1. Att $(x, y)R(x, y)$ för alla $x, y \in A$ är uppenbart ty $(x, y)R(x, y)$ betyder att $x \leq x$ och $y \leq y$ vilket uppenbart är sant. Om $(x, y)R(u, w)$ och $(u, w)R(x, y)$ så gäller att $x \leq u$, $y \leq w$, $u \leq x$ och $w \leq y$ så att $x = u$ och $y = w$, dvs $(x, y) = (u, w)$. Transitiviteten följer på analogt sätt. Elementet $(1, 1)$ är störst och $(0, 0)$ är minst ty för varje $(x, y) \in A \times A$ gäller att $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$, dvs $(0, 0)R(x, y)R(1, 1)$ som önskat.

2. Det vi ska visa är sant då $n = 1$ ty då är både vänster- och högersidan av den givna formeln $1/2$. Antag nu att formeln gäller då $n = m$ där m är något godtyckligt valt positivt heltal. Då gäller att

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{2^k} = (\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{2^k}) + \frac{m+1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{m+2}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}}$$

$$= 2 - \frac{2m + 4 - m - 1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{m+3}{2^{m+1}}$$

dvs formeln gäller även då $n = m + 1$. Resultatet följer nu av induktionsprincipen.

3. Påståendet i uppgiften är sant då $n = 56, 57, 58, 59$ eller 60, ty $56 = 5 \cdot 9 + 11 \cdot 1$, $57 = 5 \cdot 7 + 11 \cdot 2$, $58 = 5 \cdot 5 + 11 \cdot 3$, $59 = 5 \cdot 3 + 11 \cdot 4$ och $60 = 5 \cdot 1 + 11 \cdot 5$. För ett godtyckligt valt $n > 60$ antag att varje heltal i $\{56, 57, \ldots, n-1\}$ kan skrivas som en kombination av 5 och 11 på önskat sätt. Då gäller speciellt att det finns positiva heltal k och m så att $n - 5 = 5k + 11m$. Men då blir $n = 5(k+1) + 11m$ och det önskade resultatet följer av induktionsprincipen.