Diskret matematik IT ht 2005: Kryssuppgifter vecka 4

1. Visa att det för alla heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\frac{1}{2}n^{3/2} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n^{3/2}.$$

(Faktum är att $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}$; mer precist kan man visa att summan ligger strikt mellan $\frac{2}{3}n^{3/2}$ och $\frac{2}{3}n^{3/2}(1+2/\sqrt{n})$. Försök gärna visa även detta om du har tid och lust.)

2. Låt talföljden $f_1, f_2, f_3, \ldots$ vara rekursivt definierad via startvärdena $f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, \ldots, f_9 = 9$ och rekursionen

$$f_n = \lg(10 f_{n-1} f_{n-2} \ldots f_{n-9})$$

då $n \geq 10$. Visa att det för alla n gäller att $f_n < 10$. (Här står $\lg$ för 10-logaritmen.)

3. Finn två heltal u och v sådana att $307u + 828v = 1$.

Lösningar

1. Den högra olikheten är följer raskt av att alla termerna i summan är högst $\sqrt{n}$ med strikt olikhet för alla utom den sista termen. Eftersom det finns totalt n stycken termer får vi att

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n\sqrt{n} = n^{3/2}.$$

För den vänstra olikheten använder vi induktion: Olikheten vi ska visa gäller uppenbarligen för $n = 2$ ty högerledet är då $1 + \sqrt{2}$ och vänsterledet är $\frac{1}{2}2^{3/2} = \sqrt{2}$. Antag nu att den önskade olikheten gäller då $n = m$ där m är ett godtyckligt valt heltal större än eller lika med 2. Det gäller då att

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{k} + \sqrt{m+1} > \frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1}.$$

Det gäller nu för oss att visa att det sista uttrycket är minst lika stort som $\frac{1}{2}(m+1)^{3/2}$. För att göra det går det lika bra att visa att

$$(\frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1})^2 \geq (\frac{1}{2}(m+1)^{3/2})^2$$

dvs

$$m^3 + 4(m+1) + 4m^{3/2}\sqrt{m+1} \geq (m+1)^3.$$

Men det högra uttrycket är $m^3 + 3m^2 + 3m + 1$ medan det vänstra är större än $m^3 + 4m + 4 + 4m^{3/2}\sqrt{m}$ som är lika med $m^3 + 4m^2 + 4m + 4$ som i sin tur är större än det högra uttrycket. Saken är klar.

2. Vi använder induktion igen. Den önskade olikheten är uppenbarligen sann då $n = 1, 2, 3, \ldots, 9$ så fixera ett godtyckligt heltal $m \geq 10$ och antag att $f_n < 10$ för $n = 1, 2, \ldots, m - 1$. Då gäller att

$$f_m = \lg(10 f_{m-1} f_{m-2} \ldots f_{m-9}) < \lg(10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10) = \lg(10^{10}) = 10.$$

Det följer nu av induktionsprincipen att $f_n < 10$ för alla n.

3. Detta är en direkt tillämpning av Euklides utökade algoritm.