

Diskret matematik IT ht 2005: Kryssuppgifter vecka 5

1. Visa att det för alla heltal n gäller att $5|n^5 - n$.
2. Till sitt födelsedagskalas köpte Kalle tablettaskar för 7 kronor styck, klubbor för 3 kronor styck och chokladkakor för 10 kronor styck. Han köpte sammanlagt 26 saker och betalade sammanlagt 175 kronor. Hur många av varje sort köpte han? (Obs. att det kan finnas flera olika lösningar.)
3. Finn de heltal x som är kongruenta med 37 modulo 91 och kongruenta med 31 modulo 47.

Lösningar

1. Varje heltal n kan skrivas som $n = 5k + a$ där $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Då blir

$$\begin{aligned}n^5 - n &= (5k + a)^5 - (5k + a) \\ &= 3125k^5 + 3125ak^4 + 1250a^2k^3 + 250a^3k^2 + 25a^4k + a^5 - 5k - a.\end{aligned}$$

Alla termer utom två av dessa innehåller en uppenbar faktor 5 så det gäller bara att visa $a^5 - a$ är delbart med 5. Här finns bara fem olika fall att pröva och fallen $a = -1$, $a = 0$ och $a = 1$ är triviala. Med $a = 2$ blir $a^5 - a = 30$ och med $a = -2$ får vi $a^5 - a = -30$.

2. Låt x vara antalet tablettaskar, y antalet klubbor och z antalet chokladkakor som Kalle köpte. Då ger uppgiften oss de två ekvationerna

$$7x + 3y + 10z = 175$$

och

$$x + y + z = 26.$$

Den andra ekvationen talar om att $z = 26 - x - y$ och genom att stoppa in detta i den första ekvationen följer att

$$7x + 3y + 10(26 - x - y) = 175$$

dvs

$$3x + 7y = 85.$$

Detta är en lösbar diofantisk ekvation. Eftersom $3 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 = 1$ ges en lösning av $(x_0, y_0) = (85 \cdot (-2), 85 \cdot 1) = (-170, 85)$ så den allmänna lösningen blir $(x, y) = (-170 + 7n, 85 - 3n)$ där n kan vara vilket heltal som helst. För z får vi $z = 26 - x - y =$

$26 - (-170 + 7n) - (85 - 3n) = 111 - 4n$. Nu gäller det att bestämma för vilka n som både x , y och z är positiva. I detta fall gäller detta då $n = 25$, $n = 26$ eller $n = 27$. I det första fallet får vi $(x, y, z) = (5, 10, 11)$, i det andra fallet får vi $(x, y, z) = (12, 7, 7)$ och i det tredje fallet $(x, y, z) = (19, 4, 3)$. Kalle kan alltså ha köpt 5 tablettaskar, 10 klubbor och 11 chokladkakor eller så kan han ha köpt 12 tablettaskar, 7 klubbor och 7 chokladkakor eller så kan han ha köpt 19 tablettaskar, 4 klubbor och 3 chokladkakor.

3. Detta är en direkt tillämpning av kinesiska restsatsen.