Matematik Chalmers

Tentamen Diskret Matematik – IT, TMV200, HT07, Laura Fainsilber
den 15 december 2007, kl. 8.30–12.30

hjälpmedel: Inga hjälpmedel

Telefonvakt: Oscar Marmon, tel.0762-721860

Förklara i detalj hur du resonerar och räknar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

1. Hitta ett enkelt uttryck för

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i$$

och bevisa med induktion att ditt uttryck är korrekt. (6p)

2. Ange en ekvivalensrelation på mängden $\{a, b, c, d, e\}$. Rita en graf för relationen, ange ekvivalensklasserna och grannmatrisen. (6p)

3. Hitta alla lösningar till den diofantiska ekvationen

$$23x + 39y = 200$$

Ange, om det är möjligt, en lösning där både x och y är positiva. (6p)

4. Ge tre exempel på kombinatoriska frågor med svar 60, med lösningar. Beräkningarna för de olika exempel skall vara olika. Poäng ges för korrekthet och kvalite! (7p)

5. För varje tom ruta i tabellen, ange sanningsvärdet för kolumnens påstående, i radens universum, med en kort förklaring.

	$\forall x : \exists y : y < x$	$\exists x : \forall y : x \leq y$	$\forall x : \forall y : (x < y) \Rightarrow (\exists z : x < z < y)$
$\mathbf{R}_+$			
$\mathbf{Z}$			
$\mathbf{N}$			

(6p)

6.
   - Hur många funktioner finns från $\mathbf{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ till $\mathbf{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$?
   - Hur många är injektiva? Surjektiva? Bijektiva?
   - Hur många avbildar inverterbara element till inverterbara element och noll-delare till noll-delare? (6p)

7. Visa att om n är ett heltal sådant att $n | (n-1)! + 1$, så är n ett primtal.

   (6p)

8. Beräkna summorna $1^3 + 2^3 \mod 3$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \mod 5$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 \mod 7$. Ser du ett mönster? Vad kan du säga om $1^3 + 2^3 + \cdots + 100^3 \mod 101$?

   Kan du ställa upp en förmodan angående summan $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 \mod n$ och bevisa den? (7p)

Lycka till!