Lösningar, tenta tmv200, 2007.12.15

(1) Vi räknar några instanser:

$x_0 = 1 = 1$

$x_1 = 1 + 2 = 3$

$x_2 = 1 + 2 + 4 = 7$

och förmodar att $x_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

Vi bevisar detta med induktion:

basfall: se ovan

induktionssteg Antag, för något tal t, att

$$x_t = \sum_{i=0}^{t} 2^i = 2^{t+1} - 1$$

$$\text{Då är } x_{t+1} = \sum_{i=0}^{t+1} 2^i = x_t + 2^{t+1} = 2 \cdot 2^{t+1} - 1 = 2^{t+2} - 1$$

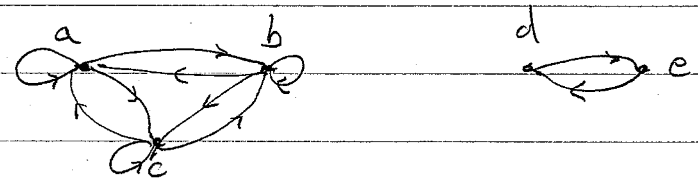
slutsats $\forall n,\ x_n = 2^{n+1} - 1$

Tenta tmv200 2007/12/15

(2) Ett exempel på ekvivalensrelation på $\{a, b, c, d, e\}$ är

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b), (d,e), (e,d)\}$$

graf:



ekvivalensklasser: $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$

grannmatris: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) Lösningar (x, y) i heltal till $23x + 39y = 200$

Vi börjar med att konstatera att 23 (primtal) och 39 (= 3·13) har största gemensama delare 1, så ekvationen har (oändligt många) lösningar.

Vi börjar med att lösa $23u + 39v = 1$ med hjälp av den utökade Euklidiska algoritmen.

$39 = 23 + 16$

$23 = 16 + 7$

$16 = 2 \cdot 7 + 2$

$7 = 3 \cdot 2 + 1$

som ger:
$$
\begin{aligned}
1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\
&= 7 - 3(16 - 2 \cdot 7) \\
&= -3 \cdot 16 + 7 \cdot 7 \\
&= -3 \cdot 16 + 7\,(23 - 16) \\
&= -10(39 - 23) + 7 \cdot 23 \\
&= -10 \cdot 39 + 17 \cdot 23.
\end{aligned}
$$

så $(u, v) = (17, -10)$ är en lösning till $23u + 39v = 1$

(kollas lätt: $39 \cdot 10 = 390$, $17 \cdot 23 = 391$)

$(x_0, y_0) = (200u, 200v) = (3400, -2000)$ är en lösning till ekvationen $23x + 39y = 200$.

Eftersom $23(39n) + 39(-23n) = 0$, följande är också lösningar: $(3400 + 39n, -2000 - 23n)$ för alla heltal n.

För att hitta en positiv lösning kan man prova lämpliga n:

t.ex $n = -87$ ger $y = -2000 + 23 \cdot 87 = -2000 + 2001 = 1$

$x = 3400 - 39 \cdot 87 = 3400 - 3393 = 7$

och lösningen $(7, 1)$, och vi kollar att $23 \cdot 7 + 39 \cdot 1 = 161 + 39 = 200$.

4 Exempel på kombinatoriska frågor med 60 som svar:

a) $60 = \frac{5!}{2!}$ som svar till "På hur många sätt kan 3 barn sätta sig på 5 stolar?" (permutationer av 3 element bland 5).

b) $60 = 3 \cdot \frac{6!}{3!3!} = 3 \cdot \binom{6}{3}$, som svar på:
"På hur många sätt kan man välja 3 kurser i samma ämne, om ämnena är matematik, datavetenskap, industriell ekonomi, och det erbjuds 6 kurser i varje ämne?"

c) $60 \overset{=6\cdot 10}{=} \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2}$ som svar till "På hur många sätt kan man välja 2 vuxna och 2 barn ur en grupp med 4 vuxna och 5 barn.

Andra tänkbara talkmgen:
$60 = 24 + 36 = 4! + 6^2 = 4! + (3!)^2$
$60 = 24 + 24 + 12 = 4! + 4! + \frac{4!}{2}$ (permutationer)

OBS: det 3:e påståendet skall vara:
$$\forall x : \forall y : (x < y) \Longrightarrow (\exists z : x < z < y)$$

5. • Påstående $\forall x : \exists y : y < x$

för $x, y \in \mathbb{R}_+$, eller $x, y \in \mathbb{Z}$: <u>ja</u>: för varje tal finns ett tal som är mindre

för $x, y \in \mathbb{N}$: <u>Nej</u>: för $x = 0$ finns inget mindre y

• Påstående $\exists x : \forall y : x \leq y$

för $x, y \in \mathbb{R}_+$: <u>Nej</u>: 0 är mindre än alla tal i $\mathbb{R}_+$, men är inte själv i $\mathbb{R}_+$

för $x, y \in \mathbb{Z}$: <u>Nej</u> $\mathbb{Z}$ är obegränsad neråt

för $x, y \in \mathbb{N}$: <u>ja</u>: $x = 0$ är mindre eller lika med varje naturligt tal.

• Påstående $\forall x ; \forall y : (x < y) \Rightarrow \exists z : x < z < y$

för $x, y \in \mathbb{R}_+$: <u>ja</u>: givet x, y, ta t.ex $z = \frac{x+y}{2}$

för $x, y \in \mathbb{Z}, \mathbb{N}$: <u>nej</u> t.ex $x = 3$, $y = 4$: det finns inget tal däremellan

6 • Antal funktioner från $\mathbb{Z}_6$ till $\mathbb{Z}_{12}$: 12^6
(varje element avbildas till ett av de 12 element i $\mathbb{Z}_{12}$)

• Antal injektiva funktioner $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$: $\frac{12!}{6!} = 12.11.10.9.8.7.$

• Antal surjektioner: 0 $\quad$ $\mathbb{Z}_6$ har färre element än $\mathbb{Z}_{12}$
• Antal bijektioner: 0 $\quad$ " ——— "

• De inverterbara element i $\mathbb{Z}_6$ är 1 och 5
" " " $\mathbb{Z}_{12}$ är 1, 5, 7, 11
Noll-delarna i $\mathbb{Z}_6$ är 0, 2, 3, 4
i $\mathbb{Z}_{12}$ är 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10
Så antalet funktioner som bevarar inverterbarhet är $4^2 \cdot 8^4$

7 Låt $n \in \mathbb{N}$ vara sådant att $n \mid (n-1)! + 1$

$$\left(\begin{array}{lll} \text{t.ex } 5 \mid 4!+1 & \text{ty } 4!+1 = 25 \\ \quad\;\; 7 \mid 6!+1 & \text{ty } 6!+1 = 721. \end{array}\right)$$

Antag att n inte är primtal, dvs att det finns $a, b \in \mathbb{N}$, $1 < a < n$, $1 < b < n$, $n = ab$.
Eftersom $a \mid n$, så har vi $a \mid (n-1)! + 1$
men $a \leq n-1 \Rightarrow a \mid (n-1)!$
så $a \mid 1$, en motsägelse!
Så det finns inga sådana a, b, dvs n är ett primtal.

$1^3 + 2^3 \equiv 1 + 8 \equiv 9 \equiv 0 \mod 3$, eller se summan som:

(8) $1^3 + 2^3 = 1^3 + (-1)^3 = 1 - 1 = 0$ (vi räknar i $\mathbb{Z}_3$, mängden av ekvivalensklasser modulo 3).

Vi räknar nästa summa modulo 5

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 65 + 35 = 0 \mod 5$$

eller $1^3 + 2^3 + (-2)^3 + (-1)^3 = 0$ i $\mathbb{Z}_5$

modulo 7: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

$$= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441 = 7 \cdot 63 \equiv 0 \mod 7$$

eller: $1^3 + 2^3 + 3^3 + (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 = 0$ i $\mathbb{Z}_7$

Det verkar givande att räkna i $\mathbb{Z}_{2k+1}$, och att uttrycka ekvivalensklasserna som $\{-k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1, k\}$

Då ser man att $1^3 + 2^3 + \dots + 99^3 + 100^3 \mod 101$

är $1^3 + 2^3 + \dots + (-2)^3 + (-1)^3$ i $\mathbb{Z}_{101}$

och att summan är 0.

Formodan: $\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \equiv 0 \mod n$ för n ett udda tal

<u>bevis</u>: skriv $n = 2k+1$, och uttryck summan i $\mathbb{Z}_n = \{-k, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, k\}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = \sum_{j=-k}^{k} j^3$$ eftersom man summerar över alla nollskilda element i $\mathbb{Z}_n$, och $0^3 = 0$.

och $$\sum_{j=-k}^{k} j^3 = \sum_{j=1}^{k} j^3 + (-j)^3 = \sum_{j=1}^{k} 0 = 0 \text{ i } \mathbb{Z}_n.$$

□.