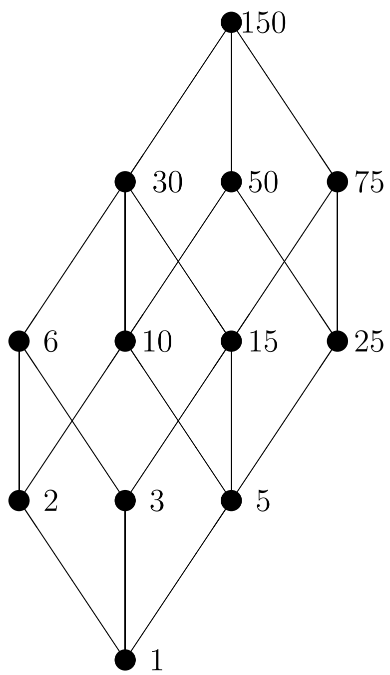
MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2009-04-18.
Lösningar

1. Vi ska visa att $L(n) = n$ för alla naturliga tal n. Vi gör ett bevis med hjälp av total induktion.
   Basfall: $n = 0$ och $n = 1$. Då är likheten trivialt sann per definition av $L(n)$.
   Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för alla naturliga tal k sådana att $k \leq n$ där $n \geq 1$. Vi ska visa att då är det också sant för $n + 1$. Men vi har

$$L(n+1) \quad = \quad 2L(n) - L(n-1) = 2n - (n-1) = n+1,$$

   där den första likheten följer av definitionen av $L(n)$ och den andra av induktionsantagandet.
   Nu följer det av satsen om total induktion att $L(n) = n$ för alla naturliga tal n.

2. (a) $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}$.
   (b) Relationen "delar" är en partiell ordning på de naturliga talen och därmed är restriktionen till S också en partiell ordning.
   (c) Hasse-diagram:



3. Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 97 &= 1 \cdot 54 + 43 \\ 54 &= 1 \cdot 43 + 11 \\ 43 &= 3 \cdot 11 + 10 \\ 11 &= 1 \cdot 10 + 1 \end{aligned}$$

Alltså är $\mathrm{sgd}(97, 54) = 1$. Vi ersätter successivt de erhållna resterna och får:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 1 \cdot 10 = 11 - (43 - 3 \cdot 11) = 4 \cdot 11 - 1 \cdot 43 \\ &= 4(54 - 1 \cdot 43) - 1 \cdot 43 = 4 \cdot 54 - 5 \cdot 43 \\ &= 4 \cdot 54 - 5(97 - 54) = 9 \cdot 54 - 5 \cdot 97. \end{aligned}$$

En lösning är alltså $x = -5 \cdot 6 = -30$ och $y = 9 \cdot 6 = 54$. Alla lösningar ges därmed av $x = -30 + 54n$ och $y = 54 - 97n$ med $n \in \mathbb{Z}$.

4. (a) Det finns 8 bokstäver och av dessa finns det en dubbel (E) och en trippel (L). Det betyder att det totala antalet möjliga ord är

$$\frac{8!}{2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 56 \cdot 60 = 3360.$$

   (b) Det är enklare att räkna ut antalet som innehåller två E i rad och subtrahera detta från det totala antalet. Antalet möjliga ord med de övriga sex bokstäverna är 6!/3!. Man kan sedan placera in E-paret på sju olika ställen. Det ger att antalet utan två E i rad är

$$3360 - 7 \cdot \frac{6!}{3!} = 3360 - \frac{7!}{3!} = 3360 - 840 = 2520.$$

5. (a) Den ska vara reflexiv så alla fem par (a, a) måste vara med. Transitiviteten kräver att $(1, 3)$ är med. Detta räcker för att den ska bli transitiv. Den är nu också antisymmetrisk, så

$$\mathcal{P} = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3), (4,3), (4,4), (5,5)\}$$

   är den minsta partiella ordning som innehåller $\mathcal{R}$.

   (b) Precis som i första deluppgiften får vi att alla fem par (a, a) måste vara med och att transitiviteten kräver att $(1, 3)$ är med. För att den nu också ska vara symmetrisk måste vi också inkludera alla i {(3,1),(4,1),(3,4)}. Den är nu också symmetrisk, så

$$\mathcal{E} = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,2), (3,1), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4), (5,5)\}$$

   är den minsta ekvivalensrelation som innehåller $\mathcal{R}$.

6. (a) Vi har t ex att $4 \mid 2^2$ men $4 \nmid 2$.

   (b) Låt $a = p^2 b$. Då gäller att $b \in \mathbb{N}$ eftersom $p^2 \mid a$. Sätt nu $n = pb$. Då gäller att $n^2 = p^2 b^2 = ab$ så $a \mid n^2$, men $a > n$ så $a \nmid n$.

   (c) Antag att $a \mid n^2$ och visa att då gäller att $a \mid n$. Låt $a = \prod_{i=1}^r p_i$ där p_i är olika primtal. Vi får att $p_i \mid n^2$ för alla p_i. Men för primtal p gäller att om $p \mid ab$ så har vi att $p \mid a$ eller $p \mid b$, så vi kan dra slutsatsen att $p_i \mid n$. Därmed ingår alla p_i i primtalsfaktoriseringen av n, så $n = m \prod_{i=1}^r p_i = ma$ där m är ett naturligt tal. Alltså har vi att $a \mid n$ vilket var precis vad vi skulle visa.

7. (a) Enligt Eulers sats är $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Det ger att

$$1 + \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv 1 + \sum_{k=1}^{p-1} 1 = p \equiv 0 \pmod{p},$$

   d v s p delar uttrycket.

   (b) Ta t ex $p = 4$. Då är

$$1 + \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 37 \equiv 1 \pmod{4},$$

   så det gäller inte att 4 delar uttrycket. Alltså gäller det inte alltid då p inte är ett primtal.