MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2008-12-18.
Lösningar

1. Det kommer antingen att vara två pojkar och tre flickor eller tvärtom och dessa två möjligheter har förstås inga gemensamma utfall. Tre pojkar och två flickor kan väljas på

$$\binom{10}{2}\binom{8}{3} = 45 \cdot 56 = 2520$$

sätt och två pojkar och tre flickor kan väljas på

$$\binom{10}{3}\binom{8}{2} = 120 \cdot 28 = 3360$$

sätt så totalt blir det $2520 + 3360 = 5880$ olika möjligheter.

2. (a) Den är reflexiv, ty $n = 1 \cdot n$ för alla n så $n \mid n$.

   Den är antisymmetrisk, ty om a och b båda är skilda från 0 så medför $a \mid b$ att $a \leq b$ så om $a \mid b$ och $b \mid a$ så får vi $a \leq b$ samt $b \leq a$ så $a = b$. Om $0 \mid b$ så måste $b = 0$ så även i fallet då någon av dem är 0 så får vi att $a \mid b$ och $b \mid a$ ger $a = b$.

   Den är transitiv, ty om $a \mid b$ och $b \mid c$ så är $b = ka$ och $c = mb$ för $k, m \in \mathbb{N}$ så $c = (mk)a$ med $mk \in \mathbb{N}$ så $a \mid c$.

   (b) Vi har att 1 är minsta elementet, ty $1 \mid n$ för alla n och därmed är också 1 det enda minimala elementet.

   Vi har att 0 är största elementet, ty $n \mid 0$ för alla n och därmed är också 0 det enda maximala elementet.

   (c) Minimala element är 2 och 3. Maximala element är 18 och 24. Det finns inget minsta eller största element.

3. Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 504 &= 1 \cdot 301 + 203 \\ 301 &= 1 \cdot 203 + 98 \\ 203 &= 2 \cdot 98 + 7 \\ 98 &= 14 \cdot 7 \end{aligned}$$

Alltså är $\mathrm{sgd}(504, 301) = 7$. Vi ersätter successivt de erhållna resterna och får:

$$\begin{aligned} 7 &= 203 - 2 \cdot 98 = 203 - 2 \cdot (301 - 1 \cdot 203) = 3 \cdot 203 - 2 \cdot 301 \\ &= 3 \cdot (504 - 1 \cdot 301) - 2 \cdot 301 = 3 \cdot 504 - 5 \cdot 301. \end{aligned}$$

En lösning är alltså $x = 3$ och $y = -5$. Om vi förkortar med 7 så får vi ekvationen $72x + 43y = 1$ och alla lösningar ges därmed av $x = 3 + 43n$ och $y = -5 - 72n$ med $n \in \mathbb{Z}$.

4. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 1$

   Då gäller att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1 \text{ och } HL = (1-1) \cdot 2^1 + 1 = 1,$$

   och alltså gäller likheten för $n = 1$.

   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt positivt heltal n. Visa att då gäller det också för $n+1$. Vi får

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} + (n+1) \cdot 2^n = \\ &= (n-1) \cdot 2^n + 1 + (n+1) \cdot 2^n = 2n \cdot 2^n + 1 = \\ &= ((n+1)-1) \cdot 2^{n+1} + 1, \end{aligned}$$

   och alltså gäller likheten också för $n+1$.

   Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla positiva heltal.

5. (a) $5418 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 43$

   (b) Från multiplikativiteten hos Eulers Φ-funktion och att

$$\Phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$$

   om p är ett primtal samt primatalsfaktoriseringen från första deluppgiften får vi att

$$\Phi(5418) = \Phi(2) \cdot \Phi(3^2) \cdot \Phi(7) \cdot \Phi(43) = 1 \cdot (3 \cdot 2) \cdot 6 \cdot 42 = 1512.$$

   (c) Enligt Eulers sats vet vi att

$$5^{\Phi(5418)} = 5^{1512} \equiv 1 \pmod{5418},$$

   ty $\text{sgd}(5, 5418) = 1$. Det ger att

$$5^{1513} \equiv 5 \pmod{5418}$$

   så svaret är 5.

6. (a) Följer direkt av att likhet är en ekvivalensrelation.

   (b) $\{2, 11, 20, 101, 110, 200\}$

   (c) Dessa är inte korrekta definitioner. Vi har t ex att $[7] = [16]$ eftersom båda har siffersumman 7. Däremot gäller t ex

$$[7] \oplus [3] = [10] \text{ och } [16] \oplus [3] = [19],$$

   men $[10] \neq [19]$ så 'additionsdefinitionen' beror på representanten. På samma sätt beror 'multiplikationen' på representanten för vi har t ex

$$[7] \otimes [7] = [49] \text{ och } [16] \otimes [7] = [112],$$

   men $[49] \neq [112]$.

7. (a) Vi vet att per definition är $\binom{p}{k}$ ett heltal och att det uppfyller den algebraiska formeln

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdots (p-k+1)}{k!}.$$

Eftersom p är ett primtal och $k < p$ så innehåller $k!$ ingen icketrivial delare till p och därmed delar $k!$ produkten $(p-1) \cdot (p-2) \cdots (p-k+1)$ och $\binom{p}{k}$ är en multipel av p.

(b) Vi vet från första deluppgiften att $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ om $1 \leq k < p$ och detta tillsammans med binomialsatsen ger nu att

$$(a+b)^p \equiv \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k} \equiv \binom{p}{0} a^0 b^p + \binom{p}{p} a^p b^0 = a^p + b^p \pmod{p}.$$