MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2009-04-18.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0762-721860.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng.

---

1. Vi definierar en talföljd $L(n)$ enligt följande:

$$\begin{cases} L(0) = 0, \\ L(1) = 1, \\ L(n) = 2L(n-1) - L(n-2), \text{ om } n \geq 2. \end{cases}$$

   Visa att $L(n) = n$ för alla naturliga tal n. (6p)

2. Låt $S = \{a \in \mathbb{N} : a \mid 150\}$ och låt $\mathcal{R}$ vara relationen på S definierad som

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S : a \mid b\}.$$

   (a) Bestäm alla element i S.
   (b) Motivera att $\mathcal{R}$ är en partiell ordning på S.
   (c) Rita Hasse-diagrammet för $\mathcal{R}$.

   (8p)

3. Lös den diofantiska ekvationen $97x + 54y = 6$, d v s bestäm *alla* heltalslösningar till ekvationen. (6p)

4. (a) Hur många olika "ord" med åtta bokstäver kan man bilda av bokstäverna i LEMURELL.
   (b) Hur många av dessa ord innehåller *inte* två E i rad?

   I båda deluppgifterna måste du räkna ut antalet explicit för att få full poäng. (8p)

Var god vänd!

5. Låt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och låt $\mathcal{R} = \{(1, 4), (4, 3)\}$ vara en relation på A.

   (a) Ange den *minsta* partiella ordningen $\mathcal{P}$ på A som innehåller $\mathcal{R}$.

   (b) Ange den *minsta* ekvivalensrelationen $\mathcal{E}$ på A som innehåller $\mathcal{R}$. (6p)

6. Universum i denna uppgiften är de naturliga talen.

   (a) Visa att
   $$\forall a\, \forall n\ \left[(a \mid n^2) \to (a \mid n)\right]$$
   är en falsk utsaga.

   (b) Antag att p är ett primtal och att $p^2 \mid a$. Visa att då finns n sådant att $a \mid n^2$ men $a \nmid n$.

   (c) Visa att om a är en produkt av r **olika** primtal, så gäller för alla naturliga tal n att $a \mid n^2$ implicerar att $a \mid n$. (8p)

7. (a) Visa att om p är ett primtal så gäller att p delar
   $$1 + \sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1}.$$

   (b) Visa att detta inte behöver vara sant om p inte är ett primtal. (8p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 1 maj. De kan från och med den 3 maj avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.