MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2008-12-18.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Martin Berglund, 0762-721860.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng.

---

1. En skolklass består av 10 flickor och 8 pojkar. Man ska ta ut ett lag med 5 personer till en matematiktävling. Reglerna säger att det måste vara minst två flickor och minst två pojkar i laget. På hur många olika sätt kan man komponera laget? Du måste räkna ut antalet sätt (som är mindre än 10000) explicit. (6p)

2. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen "delar" på en mängd M, d v s
$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in M \times M : a \mid b\}.$$
Vi förutsätter att $M \subseteq \mathbb{N}$.
   (a) Motivera kort att $\mathcal{R}$ är en partiell ordning på M.
   (b) Bestäm alla minimala, maximala samt (om de existerar) största respektive minsta element om $M = \mathbb{N}$. (Kom ihåg att $0 \in \mathbb{N}$.)
   (c) Bestäm alla minimala, maximala samt (om de existerar) största respektive minsta element om $M = \{2, 3, 6, 9, 12, 18, 24\}$.
   (8p)

3. Beräkna $\mathrm{sgd}(504, 301)$ med hjälp av Euklides algoritm och bestäm **alla** heltal x och y sådana att $504x + 301y = \mathrm{sgd}(504, 301)$. (7p)

4. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$$
för alla positiva heltal n. (7p)

5. (a) Primtalsfaktorisera 5418.
   (b) Bevisa att $\Phi(5418) = 1512$ där Φ är Eulers Φ-funktion.
   (c) Bestäm det minsta positiva tal n som är sådant att $5^{1513} \equiv n \pmod{5418}$. (8p)

Var god vänd!

6. Låt $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vara definierad som att $s(n)$ är siffersumman av n, t ex är

$$s(17289) = 1 + 7 + 2 + 8 + 9 = 27.$$

Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{N}$ genom

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : s(a) = s(b)\}.$$

(a) Motivera att detta är en ekvivalensrelation på $\mathbb{N}$.

(b) Låt $[a]$ beteckna ekvivalensklassen av a m a p $\mathcal{R}$. Räkna upp alla tal i mängden

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 1000 \text{ och } n \in [2]\}.$$

(c) Är

$$[a] \oplus [b] := [a + b] \text{ respektive } [a] \otimes [b] := [ab]$$

korrekta definitioner av operatorer på ekvivalensklasserna? Motivering krävs. (8p)

7. Låt p vara ett primtal.

(a) Visa att $p \mid \binom{p}{k}$ för alla $1 \leq k < p$,

(b) Låt a och b vara heltal. Visa att i så fall är

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

Ett tips kan vara att använda resultatet i första deluppgiften. (Det är OK att göra det även om du inte bevisat den.) (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 15 januari. De kommer att delas ut vid ett tillfälle som meddelas på kursens hemsida. Därefter kan de avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.