Diskret Matematik – IT, TMV200, HT08

Extra induktionsuppgifter

1. Vi definierar en talföljd $L(n)$ enligt följande:

$$\begin{cases} L(0) = 0, \\ L(1) = 1, \\ L(n) = 2L(n-1) - L(n-2), \quad \text{om } n \geq 2. \end{cases}$$

   Visa att $L(n) = n$ för alla naturliga tal n.

2. Vi definierar polynomen $F_n(x)$ för $n \in \mathbb{N}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} F_0(x) = 1, \\ F_{n+1}(x) = F_n(x)(x-1) + x^2, \quad n > 0. \end{cases}$$

   (a) Beräkna $F_3(x)$.

   (b) Visa att $F_n(0) = (-1)^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

3. Visa att

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1,$$

   för alla naturliga tal n.

4. Vi definierar Lucas-talen med startvärden a och b att vara talföljden $L(n)$ som definieras rekursivt genom

$$\begin{cases} L(1) = a, \\ L(2) = b, \\ L(n) = L(n-1) + L(n-2), \ n > 2. \end{cases}$$

   Speciellt ser vi att Fibonacci-talen $F(n)$ är specialfallet då $a = b = 1$. Låt $L(n)$ vara Lucas-talen med startvärden a och b. Visa att då är

$$L(n) = bF(n-1) + aF(n-2)$$

   för alla $n > 2$.

5. Visa att

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$$

   för alla naturliga tal $n > 1$.