MATEMATIK, CHALMERS

Tentamen Diskret Matematik – IT, TMV200, HT09, Laura Fainsilber
den 17 december 2009

hjälpmedel: Inga hjälpmedel, Telefonvakt: Rickard Lärkäng, tel.0703-088304

Förklara i detalj hur du resonerar och räknar.
Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

1. Man slänger en tärning fem gånger i rad och skriver ner följden av utfall. Hur många olika följder kan förekomma? Hur många olika följder där inget tal förekommer mer än en gång? Hur många olika följder där inget tal förekommer två gånger i rad? (6p)

2. Hitta alla lösningar till den diofantiska ekvationen $23x - 17y = 13$ (6p)

3. Betrakta mängden av naturliga tal större än 1, och delbarhetsrelationen $a \mid b$. Visa att relationen är en partiell ordning. Ange eventuella minimala, maximala, minsta och största element. Rita en graf eller en Hassediagram för relationen (begränsad till talen $2, \ldots, 12$). (6p)

4. Visa att om p är ett primtal och $1 \leq k \leq p-1$, så är talet $\left(\begin{array}{c} p \\ k \end{array}\right)$ delbart med p. (6p)

5. För varje mängd nedan, ange en induktiv definition. (6p)

   (a) Mängden av alla heltal delbara med 3.

   (b) Mängden av alla element i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ av formen $(n, n+1)$.

   (c) Mängden av alla ord på alfabetet $\{a, b\}$ vars längd är ett jämnt tal.

   (d) Mängden av alla ord på alfabetet $\{a, b\}$ där varje a följs direkt av minst ett b.

6. Hur lyder aritmetikens fundamentalsats (satsen om entydig faktorisering av heltal)? Uttryck denna sats först i ord, sedan som en utsaga i predikatlogik (dvs enbart med variabler, kvantorer och predikat). Om du har svårt att uttrycka vissa delar av satsen, skriv dessa i ord hellre än inte alls. (7p)

7. Följden av de harmoniska talen definieras av: $H_1 = 1$, $H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n}$ för $n > 1$.
   Visa med induktion att det för alla naturliga tal $n \geq 1$ gäller att (6p)

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$$

8. Längst upp i Pascals triangel ligger rad 0, med talet 1, sedan rad 1, med talen 1, 1, sedan rad 2, med talen 1, 2, 2, 1, osv. Talen lyder efter en rekurrensrelation, och motsvarar kombinationer $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ Skriv ner de första 6 raderna och rekursionsrelationen.

   Hur skulle man kunna utvidga Pascals triangel uppåt, för negativa rader (dvs ange rader som skulle kunna ligga ovanför rad 0)? Kopplingen till kombinationer $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ finns inte längre, men rekursionsrelationen ger ändå ett sätt att fortsätta. Ange raderna $-1, -2, -3, -4$ för en utvidgad Pascals triangel. Förklara hur du tänker! (7p)