# LÖSNINGAR TMV200 2009.12.17

**(1)**

- Alla olika utfall: det finns $6^5$ möjligheter
- Inget tal mer än en gång: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6! = 720$
- Inget tal två gånger i rad: $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 6 \cdot 5^4$

  (första tar vilket värde som helst, sedan kan tärningen ta alla värden utom den som togs sist: 5 val).

**(2)**

SGD $(23,17) = 1$ eftersom 23 och 17 är primtal.

Vi söker först Bezouts identitet för 23 och 17, m.h.a den utvidgade Euklidiska algoritmen

$$
\begin{aligned}
23 &= 17 + 6 \\
17 &= 2 \cdot 6 + 5 \\
6 &= 5 + 1
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\text{så } 1 = 6 - 5
\begin{aligned}[t]
&= 6 - (17 - 2 \cdot 6) = 3 \cdot 6 - 17 \\
&= 3(23 - 17) - 17 \\
&= 3 \cdot 23 - 4 \cdot 17
\end{aligned}
$$

och kollar att $3 \cdot 23 - 4 \cdot 17 = 69 - 68 = 1$.

Vi multiplicerar likheten med 13 för att lösa ekvation

$$23 \cdot (3 \cdot 13) - 17 \cdot (4 \cdot 13) = 13$$

dvs $23 \cdot 39 - 17 \cdot 52 = 16$

så en lösning $(x_0, y_0)$ är $(39, 52)$

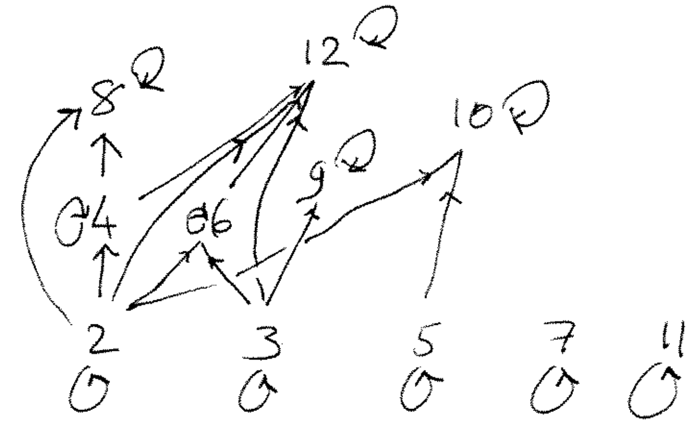
och alla lösningar är av formen $(39 + 17n,\ 52 + 23n)$ för $n \in \mathbb{Z}$.

③ Delbarhet: $a, b \in \mathbb{N}$, $a|b \Leftrightarrow \exists d : b = ad$

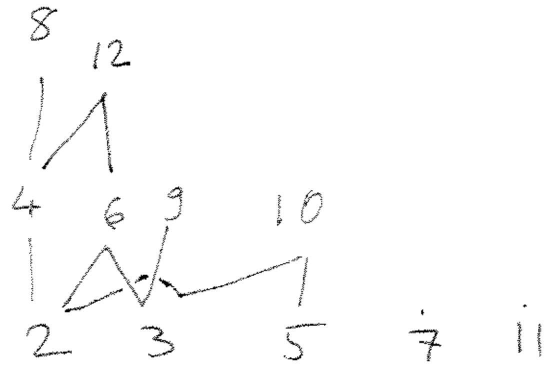
En partiell ordning är en relation som är reflexiv, transitiv och antisymmetrisk.

- Reflexivitet: $\forall a \in \mathbb{N}$, $a|a$ ty $a = 1a$.
- transitivitet: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ $a|b \wedge b|c \Rightarrow \exists d, e$ $b = ad$, $c = be$, men då är $c = ade$, så $a|c$.
- antisymmetri: $\forall a, b \in \mathbb{N}$ $a|b \wedge b|a \Rightarrow \exists d, e$ $b = ad$ $a = be$, men då är $b = bed$, så $ed = 1$ så $e = d = 1$ (både a och b är positiva, så $e, d \in \mathbb{N}$) och då $a = b$.

graf:




Hassediagram:




minimala element i $\mathbb{N}, n > 1$: primtalen

inga maximala, störst eller minst element.

(4) Vi kan skriva $\binom{p}{k} = \frac{T}{N} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p\cdot(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$

där $T = p(p-1)\cdots(p-k+1)$

och $N = k(k-1)\cdots(2)(1)$

Då har vi att $N \cdot \binom{p}{k} = T$ är delbart med $p$

men $N$ är inte delbart med $p$ (eftersom $p$ är primtal men delar ingen av faktorerna $k, k-1, k-2, \ldots$ ty $k < p$),

så $\binom{p}{k}$ är delbart med $p$ (Sats 7.2.2 : $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ eller $p \mid b$).

(5) a) $0 \in M_3$ ; $\forall x \in M_3$, $x+3 \in M_3 \wedge x-3 \in M_3$ ;
enbart dessa tal tillhör $M_3$

b) $(0,1) \in P$ ; $\forall (a,b) \in P$, $(a+1, b+1) \in P$ ; enbart dessa par tillhör $P$

c) $\cdot \in J$ (det tomma ordet) ; $x \in J \Rightarrow \{xaa, xbb, xab, xba\} \subset J$
enbart dessa ord tillhör $J$.

d) $\cdot \in B$ ; $x \in B \Rightarrow xb \in B$, $xab \in B$ ; enbart dessa ord tillhör $B$.

(6) Se Sats 7.2.5. Varje positivt heltal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal. Denna faktorisering är unik så när som på ordningen av faktorerna.

En formulering i predikatlogik:

- Universum: de naturliga talen större än 1.
- Predikat: $P(n)$ : $n$ är primtal (dvs. $k|n \Rightarrow k=n$)

$$\forall n.\ \exists k \wedge \exists p_1, p_2, \dots p_k \wedge P(p_1) \wedge \dots \wedge P(p_k) \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \exists e_1, \dots, e_k \wedge e_1, \dots e_k \in \mathbb{N}$$

$$\wedge\ n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}.$$

$$\wedge \Big[\Big( n = q_1^{f_1} q_2^{f_2} \cdots q_r^{f_r} : P(q_1), \dots P(q_r),\ r \in \mathbb{N}, f_1, \dots, f_r \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \big(\forall i : i \in \{1, \dots, r\}.\ \exists j : j \in \{1, \dots, k\} \wedge q_i = p_j \wedge f_i = e_j$$

(7) Bevis

<u>basfall:</u> $\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1 = 2 \cdot H_1 - 1$ stämmer.

Vi räknar även $H_2 = H_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

$H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

och kollar att $H_1 + H_2 = 2 + \frac{1}{2}$, och $3 \cdot H_2 - 2 = 4 + \frac{1}{2} - 2 = 2 + \frac{1}{2}$

<u>Induktionssteg</u> Antag att, för något $t$. $\sum_{i=1}^{t} H_i = (t+1)H_t - t$

Vi vill visa att $\sum_{i=1}^{t+1} H_i = (t+2)H_{t+1} - t - 1$.

$$\sum_{i=1}^{t+1} H_i = \sum_{i=1}^{t} H_i + H_{t+1} = (t+1)H_t - t + H_{t+1}$$ enlig indukt. ant

Men $H_t = H_{t+1} - \frac{1}{t+1}$ enligt definitionen, så $(t+1)H_t - t + H_{t+1} = (t+1)H_{t+1} - 1 - t + H_{t+1}$

$$= (t+2)\,H_{t+1} - t - 1$$

och därmed är likheten bevisad.

<u>Slutsats</u>: $\forall n \geq 1 \quad \sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$

(8) Rekursionsrelation: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

rad 0: 0 1 0
rad 1: 0 1 1 0
rad 2: 0 1 2 1 0
rad 3: 0 1 3 3 1 0
rad 4: 0 1 4 6 4 1 0
rad 5: 0 1 5 10 10 5 1 0

Man tänker sig 0-or till höger och vänster om de meningsfulla kolonnerna.

För att fortsätta med rekursionsrelationen måste rad −1 vara

rad −1: 0 1 −1 1 −1 1 −1 · · · ·

rad −2: 0 1 −2 +3 −4 +5 −6 · · · ·

rad −3: 0 1 −3

dvs den utvidgade triangeln har:

0 1 −4 +10 −20 +35 − · · ·
0 1 −3 +6 −10 +15 −21 ← $(-1)^k \binom{k+1}{2}$
0 1 −2 3 −4 +5 −6 · ← $(-1)^k \cdot k = (-1)^k ($
0 1 −1 1 −1 1 · · · ← $(-1)k$
0 1 0
0 1 1 0
0 1 2 1 0
0 1 3 3 1 0
0 1 4 6 4 1 0

$\binom{n}{k}$