MATEMATIK, CHALMERS

Omtentamen Diskret Matematik – IT, TMV200, HT09, Laura Fainsilber den 10 april 2010

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: David Witt-Nyström, tel.0703-088304

Förklara i detalj hur du resonerar och räknar.
Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

1. Visa med induktion att det för alla naturliga tal $n \geq 1$ gäller att (6p)

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

Ange induduktionsbevisets struktur tydligt och förklara vad du gör.

2. Hur många av heltalen $1, 2, 3, \cdots, 500$ är relativt prima med 500?
Hur många är relativt prima med 42, (dvs. sådana att SGD$(n, 42) = 1$)? (6p)

3. Vilken rest erhålls då 207^{61} delas med 13?
Ange tre exempel till på tal a och b, $a > 100$ och $b > 50$, sådana att resten vid division av a^b med 13 ger samma resultat som ovan. Förklara hur du vet det. (6p)

4. Clinton bor på en ö i Karibien. Varje lördag går han ner till hamnen och hämtar sin post. Båten med post och tidning kommer var femte dag och kommer nästa gång på fredag. Det är tisdag idag. Om hur många dagar blir nästa tillfället då Clinton, när han går ner och hämtar sin post, får en dagsfärsk tidning? Hur ofta händer det? (6p)

5. För varje mängd nedan, ange en induktiv definition. (6p)
   (a) Mängden av alla naturliga tal delbara med 5.
   (b) Mängden av alla naturliga tal kongruenta med 3 modulo 13.
   (c) $M = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; x \geq y\}$

6. Vad innebär det att en funktion är injektiv? Surjektiv? Uttryck definitionerna först i ord, sedan med hjälp av predikatlogik (dvs enbart med variabler, kvantorer och predikat). (7p)

7. Kan du rita den fullständiga grafen med 5 noder K_5 utan att lyfta pennan och utan att gå på samma kant flera gånger? Förklara hur du gör eller varför det inte går.
För vilka naturliga tal n har grafen K_n en Eulercykel? Om en fullständig graf inte har någon Eulercykel, kan man ta bort några kanter och få en graf med Eulercykel? Hur många kanter i så fall? (7p)

8. Låt X vara en mängd, och betrakta följande relation på potensmängden $P(X)$: En delmängd S är i relation med en delmängd R om och endast om det finns en bijektion från S till R. Är detta en ekvivalensrelation? Beskriv i så fall ekvivalensklasserna. Är det en partiell ordning? Ange i så fall minsta, största, minimala och maximala element. (6p)

Lycka till!

① Induktionsbevis

Vi skall visa med induktion att följande identitet P_n gäller för alla tal $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:
$P_n: \sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

Basfall: för $n = 1$: $\sum_{i=1}^{1} i \cdot i! = 1 \cdot 1! = 1 = (1+1)! - 1$
så formeln P_n gäller för $n = 1$

(vi räknar även P_2: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5 = (2+1)! - 1$
P_3: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23 = (3+1)! - 1$

Induktionssteg Vi antar att identiten P_k gäller för något tal $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, och vill visa att det medför att även P_{k+1} gäller:
Induktionsantagande: $\sum_{i=1}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$

Vi räknar nu båda leden i P_{k+1}:
$$\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot i! = \left(\sum_{i=1}^{k} i \cdot i!\right) + (k+1)(k+1)!$$
$$= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$$
$$= (1+k+1)(k+1)! - 1$$
$$= (k+2)(k+1)! - 1$$
$$= (k+2)! - 1$$ vilket är högerledet i P_{k+1}

så även P_{k+1} gäller

Slutsats Induktionsprincipen medför att P_n gäller för alla $n \geq 1$.

(2)

- $\varphi(500)$ är antalet tal upp till 500, relativt prima med 500

$$\varphi(500) = \varphi(2^2 \cdot 5^3) = \varphi(2^2) \cdot \varphi(5^3)$$
$$= (2^2 - 2)(5^3 - 5^2)$$
$$= 2 \cdot 100 = 200$$

Resultaten kan även nås med samma metod som nedan:

- Vi använder "inklusion-exklusions-principen":

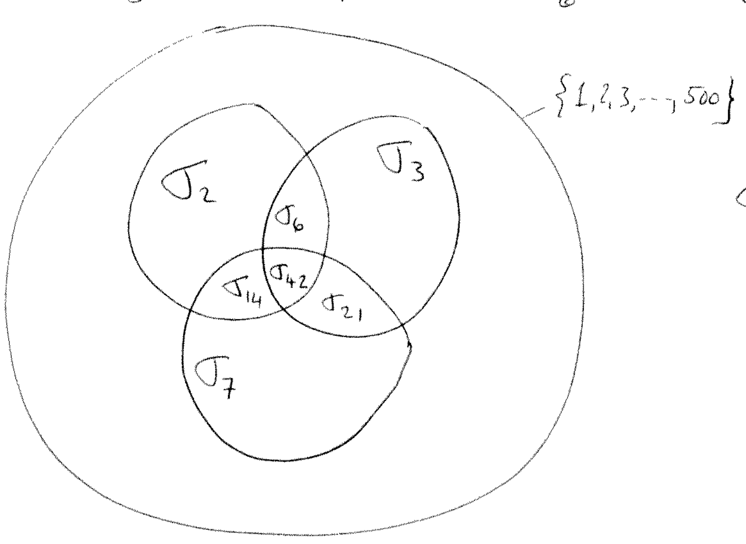
Låt S_p beteckna antalet heltal upp till 500 ~~relativt prima med~~ som är multipler av p.

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, så de tal som är relativt prima med 42 är de som inte är multipler av 2, 3, eller 7,

så
$$T = 500 - S_2 - S_3 - S_7 + S_6 + S_{21} + S_{14} - S_{42}$$
$$= 500 - 250 - 166 - 71 + 83 + 23 + 35 - 11$$
$$= 84 + 12 + 58 - 11$$
$$= 143$$

Där S_n är det största heltalet mindre eller lika med $\frac{500}{n}$

$\frac{498}{3} = 166$, $\frac{497}{7} = 71$ $\frac{498}{6} = 83$ $\frac{500}{21} = 23 + \frac{17}{21}$ osv.



$$\sigma_p = \left\{ k \in \mathbb{N}, k \leq 500; \; p \mid k \right\}$$

(3)

För att beräkna resten av 207^{61} vid division med 13, vill man <u>inte</u> räkna ut 207^{61}.

Man vet att om $r \equiv 207 \mod 13$

så är $r^{61} \equiv (207)^{61} \mod 13$

Man räknar ut att $207 \equiv -1 \mod 13$

(t.ex genom att notera att $208 = 13 \cdot 16$)

och därmed är $(207)^{61} \equiv (-1)^{61} \equiv -1 \cdot (-1)^{60} \equiv -1 \mod$

; så man får resten 12 vid division av 207^{61} med 13,

För att skapa fler exempel av samma sort väljer man $a \equiv -1 \mod 13$, t. ex $a = 129$, $a = 142$, $a = 15$

(eftersom $130 = 13 \cdot 10$, $143 = 13 \cdot 11$, $156 = 13 \cdot 12$)

och b ett udda tal, t. ex $b = 51$, $b = 53$ eller $b = 55$.

Då är $a^b \equiv (-1)^b \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1 \mod 13$, där $b = 2k+$

(4) Om man utgår från dagens datum (tisdag), så kommer båten om 3 dagar, och var femte dag, vilket kan uttryckas som $d \equiv 3 \mod 5$.
Lördagen är om 4 dagar, och förekommer var sjunde dag.
så man söker d med $d \equiv 4 \mod 7$

Så vi vill hitta en dag d som uppfyller båda villkoren.
$$\begin{cases} d \equiv 3 \mod 5 \\ d \equiv 4 \mod 7 \end{cases}$$

~~Man~~ Enligt kinesiska restsatsen finns det oändligt många lösningar. Man hittar en t.ex genom att hitta en Bezout relation, mellan 5 och 7.
t. ex $(-2) \cdot 7 + 3 \cdot 5 = 1$
och därmed $d = -2 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 4 = -42 + 60 = 18$
är en lösning. Alla lösningar är av formen $18 + 35n$ för något $n \in \mathbb{Z}$.

Om 18 dagar får Clinton en färsk tidning med sin post!

OBS. Denna uppgift föreslogs av studenter HT09.

5) För mer om induktivt definierade mängder, se stencil av Hein (länkad från kurswebsidan)

a) bas: $0 \in S_5$
induktion: $x \in S \Rightarrow x+5 \in S_5$
avslut: detta ger alla element i S_5

b) bas: $3 \in S$
induktion: $x \in S \Rightarrow x + 13 \in S$
avslut: detta ger alla element i S

c) bas. $(0,0) \in M$ (eller $(1,1) \in M$
induktion: $(x,y) \in M \Rightarrow (x+1, y) \in M$
$(x,y) \in M \Rightarrow (x+1, y+1) \in M$
avslut. detta ger alla element i M

6) Injektivitet

En funktion är injektiv om och endast om ~~[illegible]~~ olika element i definitionsmängden alltid avbildas till olika element.

dvs: $f: A \to B$ injektiv

$\Leftrightarrow \forall x : \forall y . (x \in A \wedge y \in A \wedge f(x) = f(y)) \Rightarrow x = y$

eller ännu bättre: $f \subset A \times B$. f är injektiv
$\Leftrightarrow [\forall x : \forall y : \forall t . ((x,t) \in f \wedge (y,t) \in f) \Rightarrow x = y]$

Surjektivitet

En funktion $f : A \to B$ är surjektiv om f antar alla värden i B.

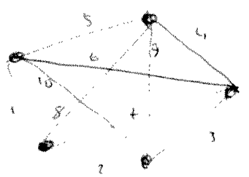
dvs $f : A \to B$ surjektiv $\Leftrightarrow$

$$\forall y \; y \in B \Rightarrow \exists x \; x \in A : f(x) = y$$

(eller, enklare men mindre explicit: $f(A) = B$)

Se kursboken, avsnitt 3.2.

(7) K_5 har 5 noder, och alla möjliga kanter.



Varje nod har gradtal 4 (jämnt), så det finns en Eulercykel (i själva verket många Eulercykler). Man kan t ex först gå runt alla "ytterkanterna" och sedan rita den "inre stjärnan". (se numreringen)

K_2 • — • har en Euler väg, ingen Eulercykel.

För alla udda n har noderna det jämna $n-1$ som gradtal, så det finns en Eulercykel.
För jämna n är gradtalet udda, så det finns ingen. Man kan då lägga till $\frac{n}{2}$ kanter, mellan skilda par av nod. Den nya grafen har Eulercykler.

(8) X en mängd

$Y = P(X)$ mängden av alla delmängder i X.

$S, R \in Y$. $S \mathcal{R} R$ om det finns en bijektion mellan S och R

- Relationen är reflexiv. Identiteten är en bijektion från varje mängd till sig själv.

Relationen är symmetrisk: om det finns en bijektion $f : S \to R$, så finns f^{-1}, bijektion från R till S.

Relationen är transitiv: om $f : S \to R$, $g : R \to T$ är bijektioner, så är $g \circ f : S \to T$ en bijektion.

Så relationen är en ekvivalensrelation, och ekvivalensklasserna motsvarar antal element i delmängderna (detta är ett sätt att definiera kardinalitet av en mängd).

Exempel. $X = \{1, 2, 3\}$

$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

ekvivalensklassen $\{\emptyset\}$: "noll"

$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ "ett"

$\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ "två"

$\{\{1,2,3\}\}$. "tre"

Relationen är ej antisymmetrisk (för $X \neq \emptyset$) och därmed ej