MATEMATIK, CHALMERS

Omtentamen Diskret Matematik – IT, TMV200, HT09, den 17 augusti 2010

Hjälpmedel: inga hjälpmedel. Telefonvakt: Martin Berglund, tel.0703-088304
Rättade tentor kan ses och hämtas på onsdag 8 sept kl.11.45–12.45 i MVL11 (MV, entréplan)

Förklara i detalj hur du resonerar och räknar.
Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.

1. Låt $x_n = 2^{2n} - 1$. Räkna ut x_1, x_2, x_3, och ställ upp en hypotes om delbarhet av x_n. Bevisa din hypotes. (6p)
2. Låt p vara ett primtal och a ett heltal. Visa att om p inte delar a, så finns ett heltal x sådant att p delar $(ax - 1)$. (6p)
3. Ge minst två olika bevis för formeln $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (6p)
4. En schackbräde består av 8×8 rutor. Hur många kvadrater finns det på brädet? (Kvadrater består av ett helt antal rutor: $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \ldots$). Svara med en summa innan du beräknar antalet. (6p)
5. Beskriv vilka tal som ingår i mängderna S och T, med induktiv definition:
   Bas: $0 \in S, 7 \in S$
   Induktion: $x \in S \Rightarrow x + 14 \in S$
   Det finns inga fler element i S
   Bas: $4 \in T$,
   Induktion: $y \in T \Rightarrow y + 9 \in T$
   Det finns inga fler element i T
   Vilka tal ingår i $S \cap T$? (6p)
6. Ge tre exempel på kombinatoriska frågor som har svar 56, med olika kombinationer eller permutationer. (7p)
7. Bevisa följande lagar i satslogik:
   (a) $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
   (b) $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$ (6p)
8. Låt n vara ett positivt heltal.
   (a) Hur många lösningar har ekvationen $x + y = n$ med x och y naturliga tal? (7p)
   (b) Hur många lösningar har ekvationen $x + y + z = n$ med x, y och z naturliga tal?
   (c) Hur många lösningar har ekvationen $x + y + z + t = n$ med x, y, z, t naturliga tal?

Lycka till! **Laura Fainsilber**

Lösningar omtenta TMV200 – 2010.08.17

Laura Fainsilber.

1) $x_n = 2^{2n} - 1$

$x_1 = 2^2 - 1 = 3$

$x_2 = 2^4 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$

$x_3 = 2^6 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$

Jag skall visa att: $\forall n \geq 1$, $3 | x_n$ med induktion

* basfall: Påståendet stämmer för $n = 1, 2, 3$, se ovan
* Induktion: anta att $3 | x_n$
  vi vill visa att $3 | x_{n+1}$.
  men $x_{n+1} = 2^{2n+2} - 1 = 4x_n + 3$
  så $3 | x_{n+1}$
  vi ser att om $x_n = 3k$, så är $x_{n+1} = 3 \cdot (4k+1)$
* Slutsats: $\forall n \geq 1$, $3 | x_n$ □

Man kan även ge ett direkt bevis:

$x_n = 2^{2n} - 1 = (2^n - 1)(2^n + 1)$

vart tredje tal är delbart med 3, så ett av $(2^n - 1)$, 2^n, $(2^n + 1)$ är delbart med 3.

Men $3 \nmid 2^n$, så $3 | (2^n - 1)$ eller $3 | (2^n + 1)$ och 3 delar produkten □

2) $SGD(a, p) = 1$ innebär att det finns en Bezoutrelation: $\exists u, x$: $up + xa = 1$

Detta kan tolkas som

$ax - 1 = -up$, så man ser att p delar $ax - 1$. □

OBS Man kan även tolka $p | ax - 1$ som $ax \equiv 1 \bmod p$ dvs. a är inverterbar i $\mathbb{Z}_p$

(3) Bevis för $\forall n \geq 1 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

- ett kombinatorisk bevis:

$\binom{n}{k}$ är antalet delmängder av $\{1, \ldots, n\}$ med k element, så $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ är antalet delmängder i $\{1, \ldots, n\}$ med mellan 0 och n element, dvs. antalet delmängder överhuvudtaget (inkl. $\{1, \ldots, n\}$ själv, och $\emptyset$) och det finns 2^n ~~delmängder~~ delmängder.

- Man kan använda binomialsatsen och se att.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

- Ett induktionsbevis:

  * För $n=1$, $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = 1 + 1 = 2$

  * Antag att $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

  vi vill visa att $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$

  Vi har rekursionsrelationen: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ för $k>0$

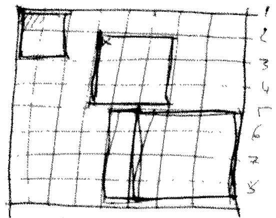
  så $$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k}$$

  $$= \binom{n}{0} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

  $$= 2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

  (induktionsantagande) □

(4) Schackbräden innehåller



$8 \times 8 = 64$ 1x1 – rutor

$7 \times 7 = 49$ 2x2 – kvadrater (en med övre vänster hörn i varje ruta utom sista spalt och sista rad)

$6 \times 6 = 36$ 3x3 – kvadrater (en med övre vänster hörn i varje ruta utom de 2 sista spalter och ra

⋮

$2 \times 2 = 4$ 7x7 – kvadrater (med hörn i en av de första 4 rutorna)

$1 \times 1 = 1$ 8x8 – kvadrat

Så vi har $\sum_{k=1}^{8} k^2$ kvadrater.

Att $\sum_{k=1}^{8} k^2 = 204$ ser man genom att summera eller med formeln $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(5) S är 7-ans tabell. $S = \{n \in \mathbb{N},\ 7 \mid n\}$

$T = \{y : y \equiv 4 \pmod 9\} = \{4, 13, 22, 31, 40, 49, \ldots\}$
$= \{9k + 4,\ k \in \mathbb{N}\}$

$$S \cap T = \{y : \exists k, \exists l : y = 7l \wedge y = 9k + 4\}$$

Vi löser den diofantiska ekvationen $7l = 9k + 4$
dvs $7l - 9k = 4$
har en lösning $(l, k) = (7, 5)$ ty $7 \cdot 7 - 9 \cdot 5 = 49 - 45$
och allmän lösning $(l, k) = (7 + 9n, 5 + 7n), n \in \mathbb{Z}$
och $S \cap T = \{y : y = 7l = 7(7 + 9n) = 49 + 63n \quad n \in \mathbb{N}$

(6) $\boxed{1}$: På hur många sätt kan 2 personer sätta sig på 8 platser?
Svar. Permutation av 2 av 8 element; det finns $\frac{8!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$ sätt.

$\boxed{2}$ $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 8 \cdot 7 = 56$

På hur många sätt kan man välja 3 bollar ur en säck med 8 olika bollar?

$\boxed{3}$ $56 = 2 \cdot \binom{8}{2} = 2 \cdot \frac{8!}{6!2!} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 7}{2}$

På hur många sätt kan man välja ut två personer ur samma lag, om det finns två lag med 8 pers. i varje.

(7) Gör sanningstabeller.

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg B$	$\neg B \to \neg A$
S	S	S	F	S	F	S
S	F	F	F	F	S	F
F	S	S	S	S	F	S
F	F	S	S	S	S	S

Man ser att sanningsvärdena för de 3 uttryck $(A \to B)$, $(\neg A \vee B)$ och $(\neg B \to \neg A)$ är samma.

eller resonera ...

(8) (a) $x + y = n$ har lösningarna $(0,n), (1,n-1), (2,$ $\ldots (n,0)$, dvs $n+1$ lösningar

(b) För att lösa $x+y+z=n$, observera att $z = n-(x+y)$ och att $x+y$ kan ta alla värden mellan 0 och n, så antalet lösningar är $\sum_{k=0}^{n}(k+1) = n+1+\sum_{k=0}^{n} k$

$= n+1 + \frac{n(n+1)}{2}$

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

(c) För att lösa $x+y+z+t=n$, observera att $t = n-(x+y)$, och att $x+y+z$ kan ta alla värden mellan 0 och n. Om vi betecknar med $B(k)$ antalet lösningar till $x+y+z=k$ (som ovan i (b)), så har vi

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n} B(k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(k^2+3k+2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + 2\sum_{k=0}^{n} k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(n^3 + 12n^2 + 11n + 1\right)$$