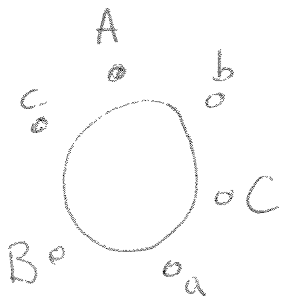
(1)



3 Par A a B b C c
♀ ♂ ♀ ♂ ♀ ♂

Placera A: 6 sätt

A:s grannar måste vara **b** och **c**: 2 sätt (höger/vän

b:s andra granne måste vara C, c's granne B: 1 sätt

a är kvar: 1 sätt. Totalt 6·2 = 12 sätt

om man verkligen bryr sig om vilken stol var och en sitter på.

Om man är intresserad av vilka som sitter på höger resp. vänster av var och en, är det 2 sätt.

Vill man bara veta vilka som är bordsgrannar, finns bara ett sätt.

(2) A har 2^n element

kombinatoriskt bevis: För att välja en delmängd kan man, för varje element, välja att ta med det eller ej: 2 val. Enligt multiplikationsprincipen har man då $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$ sätt att välja delmängd (inkl. $\emptyset$ välj "nej, nej … nej," och hela A: "ja, ja … ja"

Induktionsbevis: induktion på n: antalet element i A

bas fall $n = 0$. $A = \emptyset$ har en delmängd: $\emptyset$

Jag räknar lite till för att få en uppfattning:

$n = 1$, 2 delmängder: $\emptyset$ och A

$n = 2$: 4 delmängder: $\emptyset$, A, $\{a\}$, $\{b\}$ om $A = \{a, b\}$

Induktionssteg

Antag att påståendet gäller för alla mängder A med k element, för något $k \geq 0$, dvs en mängd med k element har 2^k delmängder.

Jag vill visa att alla mängder med $k+1$ element har 2^{k+1} delmängder.

Ta en mängd A med $(k+1)$ element, och välj ut ett element $a \in A$. Då har mängden $A \setminus \{a\}$ k element och därmed 2^k delmängder enligt induktionsantagandet. Varje delmängd i A är antingen en delmängd i $A \setminus \{a\}$ (om den inte innehåller a), eller av formen $\{a\} \cup B$, där B är en delmängd i $A \setminus \{a\}$ (om den innehåller a), och det finns 2^k möjligheter för B. Så A har $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ delmängder.

(2. forts.)

Slutsats: Varje mängd med n element har 2^n delmängder, för $n \in \mathbb{N}$.

(3) Lös den diofantiska ekvationen

(*) $\quad 1428x + 1160y = 20$

Lägg märke till att koefficienterna är delbara med 4, och reducera ekvationen (annars får man inte med alla lösningar).

(*) är ekvivalent med ekvationen

$$357x + 290y = 5$$

Euklides algoritm för att hitta sgd(357, 290):

$357 = 290 + 67$
$290 = 4 \cdot 67 + 22$
$67 = 3 \cdot 22 + 1$

ger (utökad algoritm för att hitta Bezouts relation)

$$1 = 67 - 3 \cdot 22 = 67 - 3(290 - 4 \cdot 67)$$
$$= 13 \cdot 67 - 3 \cdot 290$$
$$= 13(357 - 290) - 3 \cdot 290$$
$$= 13 \cdot 357 - 16 \cdot 290$$

(OBS: kolla att det verkar rimligt)

så vi får en lösning $(x_0, y_0) = (65, -80)$

tty $357 \cdot (13 \cdot 5) + 290 \cdot (-16 \cdot 5) = 5$

och i allmänhet $357 \cdot (13 \cdot 5 + 290n) + 290(-16 \cdot 5 - 357n) = 5$

så den allmänna lösningen är

$$(x, y) = (65 + 290n, -80 - 357n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(4) R är en ekvivalensrelation : låt $B \subseteq A$, $C \subseteq A$, $D \subseteq A$

den är <u>reflexiv</u>: varje delmängd B har en identitetsfunktion $f: B \to B$, $x \mapsto x$, bijekti

<u>symmetrisk</u>: om $f: B \to C$, $x \mapsto y$ är en bijektion

så finns $f^{-1}: C \to B$, $y \mapsto x$, även den bijek

<u>transitiv</u> om $f: B \to C$ och $g: C \to D$

är bijektioner, så är även

$g \circ f: B \to D$ en bijektion.

Två delmängder har en bijektion från den ena till den andra om de har samma kardinalitet, dvs samma antal element.

så varje kardinalitet ger en ekvivalensklass

med $[0] = \{\emptyset\}$

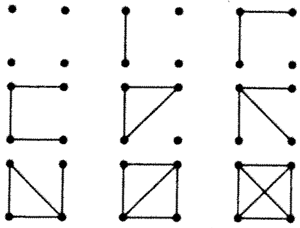
$[1] = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots\}$ om $a, b, c, \dots \in A$

$\vdots$

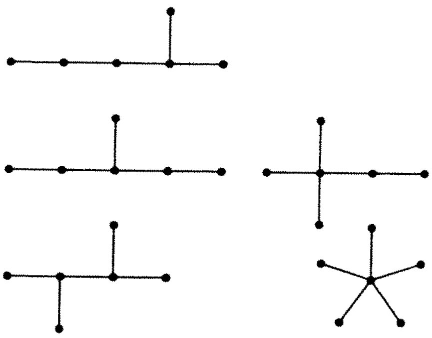
(ev. med oändliga mängder om A är oändlig)

5

a) ur Diskret Matematik Kimmo Eriksson, Hillevi Gavel studentlitt.

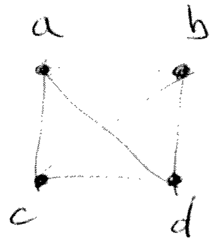


b)



Uppritade som här påminner de starkt om olika isomerer av kolvätet hexan. (Dock inte den sista, för kol har bara fyra valenselektroner.)

c)



Man kan välja en graf genom att utgå från alla kanter i den fullständiga grafen med de givna noderna, och bestämma för varje kant huruvida den skall vara med eller ej

Den fullständiga grafen K_n har $\frac{n(n-1)}{2}$ kanter så man har $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ möjliga grafer.

För 4 noder ger detta $2^{4\cdot 3/2} = 2^6 = 64$ grafer (många av dessa är isomorfa med varandra)

för 6 noder $2^{6\cdot 5/2} = 2^{15} = 16384$ grafer.

(6) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, så man kan fundera på delbarhet med 8, mod 9, och ~~mod~~ 5.

$$n^2(n^2-1)(n^2-4) = n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n+1)(n-2)(n+2)$$
$$= n \cdot \left[(n-2)(n-1) \cdot n \cdot (n+1)(n+2)\right]$$

Produkten av 5 successiva tal $(n-2$ till $(n+2))$ innehåller ~~(minst)~~ exakt en multipel av 5, minst en multipel av 4 och ett annat jämnt tal, och minst en multipel av 3, och är därmed delbar med $5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3$. För att se att vårt tal är delbart mod 9 (och därmed med $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$) kollar vi närmare på multipler av 3: Om

$3 \mid (n-2)$, så även $3 \mid (n+1)$ ty $n+1 = (n-2)+3$. På samma sätt

$3 \mid (n-1) \Rightarrow 3 \mid (n+2)$ ty $n+2 = (n-1)+3$.

om $3 \mid n$, så har vi $9 \mid n^2$. I alla fall får vi att $9 \mid n^2(n^2-1)(n^2-4)$ och därmed $360 \mid n^2(n^2-1)(n^2-4)$

<u>OBS</u> Att $\left(a \mid m \wedge b \mid m \wedge \text{sgd}(a,b) = 1\right) \Rightarrow \left(ab \mid m\right)$

framgår av följande argument:

skriv $m = ad$ (definition av delbarhet: $a \mid m$)

$\left(b \mid m = ad \wedge \text{sgd}(a,b) = 1\right) \Rightarrow b \mid d$ (lemma 7.2.1)

så $\exists e : d = eb$, så $m = abe$, dvs $ab \mid m$.

7

R R S G 2 3 5 6 7 8

Universum: korten på bordet

Predikat: $P(k)$: kortet k har primtal

$G(k)$: har grönt.

Ängeln säger $\forall k: P(k) \rightarrow G(k)$

Kom ihåg sanningstabellen för $P \rightarrow G$:

P	G	$P \rightarrow G$
F	F	S
F	S	S
S	F	F
S	S	S

Vi måste vända på

- korten med primtal synligt (om en av dessa inte är grön, så är påståendet falskt)
- korten ~~som~~ med röd och silver synlig (om en av dessa har primtal, så är påståendet falskt.

Därmed kollar vi $G(k)$ då $P(k)$ gäller, och $P(k)$ då $\neg G(k)$ gäller.

Korten med $\neg P(k)$ behöver vi inte kolla ej heller $G(k)$. för i dessa fall är $P \rightarrow G$ sant automatiskt.

(8) $S(n)$ är egentligen resten av n vid divisio
med 9 (fast med 9, och inte 0, om $9|n$) ty $10 = 9+1$, $100 = 99+1$, $1000 = 999+1$, $10^n = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ st.}} + 1$

och siffersumman ges av 1 för varje ental, för varje 10-tal, varje 100-tal, osv. Vi har då $s(n) \equiv n \mod 9$, så $S(n) = s(s(\ldots(n))) \equiv n \mod 9$, och $1 \leq S(n) \leq 9$

Vad man kollar när man tror att $C = A \cdot B$ och kollar om $S(C) = S(A) \cdot S(B)$, är huruvida

$C \equiv A \cdot B \mod 9$

Man upptäcker de fel i multiplikation som ger en annan klass modulo 9, men man kan missa fel som ger samma klass (t.ex av typen $9 \cdot 7 = 54$ istället för $9 \cdot 7 = 63$).