Tentamen i Diskret Matematik, TMV200.

2012-08-22, 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Telefon: Timo Hirscher, 0703-088304

Motivera väl dina lösningar och svar. Poäng ges inte för bara svaren, utan för fullständig förklaring av lösningarna.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida.

---

1. Lös den diofantiska ekvationen $8x + 15y = 100$. (6p)

2. Vi definierar en talföljd $L(1), L(2), \cdots$ enligt följande rekursiv formel:

$$L(0) = 2, \quad L(1) = 4, \quad L(n) = 3L(n-1) - 2,\ n \geq 2.$$

Bevisa med induktion att $L(n) = 3^n + 1$ för alla naturliga tal n. (6p)

3. Hur många av heltalen $1, 2, \cdots, 300$ är relativt prima med 300? Hur många är relativt prima med 10? (6p)

4. Här kommer 3 påståenden. Ange S (Sant) eller F (Falskt). Ge ett resonemang för de sanna påståendena och ett motexempel för de falska påståendena. Endast svar med rätta argument ger något poäng. Universum är mängden $\mathbb{Z}^+$ av positiva heltal. (7p)

[a] $\forall x, \forall y, \forall z : x|yz \Rightarrow x|y$ eller $x|z$.

[b] $\forall x, \forall y, \forall z : sgd(x, y) = 1$ och $sgd(x, z) = 1 \Rightarrow sgd(x, yz) = 1$

[c] Låt p och q vara två heltal, $p \neq q$. Det finna x sådant att

$$x \equiv 0 \bmod p \quad \text{och} \quad x \equiv 1 \bmod q.$$

5. Hur många olika 6-siffriga tal kan man bilda av sifforna i talet 123345? (6p)

6. Låt A vara en mängd med m element och $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ med n element. Hur många funktioner $f : A \to B$ som har b_1 i sin bild (dvs, det finns $a \in A$, $f(a) = b_1$) finns det? (6p)

7. Kan du rita de fullständiga grafen K_4 med 4 noder utan att lyfta pennan och utan att gå på samma kant flera gånger? Kan du göra det för K_5 med 5 noder? Förklara varför du kan eller inte kan. (6p)

8. Låt p, q vara två heltal. Vi definierar en avbidning: $f : \mathbb{Z}_{pq} \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ från $\mathbb{Z}_{pq}$ till produktmängden $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, genom $f([x]_{pq}) = ([x]_p, [x]_q)$. Bevisa att f är väldefinierad (dvs oberoende på representater). Antag p och q är relativt prima. Bevisa att f är en bijektion. (1+6p)

Lycka till! GZ