TMV200 H11. Dis. Mat
MATEMATIK
Chalmers

Repetitionsövning [1]

(1) Avge SANT eller FALSKT med bevis (med hjälp av kända satser/lagar eller motexempel) för följande logiska påståenden.
a: $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$.
b: $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$.
c: $(p \to (q \vee r)) \Leftrightarrow (p \to q) \vee (p \to r)$.

(2) Avge SANT eller FALSKT med bevis (med hjälp av kända logiska lagar eller motexempel) för följande påståenden. Universum är $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}^+$ betecknar delmängden av positiva heltal.
a: $\forall a : a|1 \Rightarrow a = \pm 1$.
b: $\forall a : a|0$.
c: $\forall a \in \mathbb{Z}^+, \forall b \in \mathbb{Z}^+ : sgd(a, ab) = a$.
d: $\forall a, \forall b, \forall c : sgd(a, b) = 1$ och $sgd(b, c) = 1 \Rightarrow sgd(a, c) = 1$.
e: $\forall a, \forall b, \forall c : sgd(a, b) > 1$ och $sgd(b, c) > 1 \Rightarrow sgd(a, c) > 1$.
f: sgd(a, b) är den enda delaren av a och b som kan skrivas $ax + by$, dvs snittet $\mathbb{D} \cap L = \{sgd(a, b)\}$ består av bara $sgd(a, b)$, där $D = \{e \in \mathbb{Z}^+ : e|a \wedge e|b\}$ är mängden av delare av a och b, och $L = \{z = ax + by; x, y \in \mathbb{Z}\}$ är mängden av tal som kan skrivas som $ax + by$.
g: Om $[a] \neq [0]$ i $\mathbb{Z}_n$ (dvs $a \not\equiv 0 \mod n$) då gäller att $[a]^k = [1]$ i $\mathbb{Z}_n$ (dvs $a^k \equiv 1 \mod n$) för något k.

(3) Låt A vara en mängd av n element.
Hur många delmängder av A finns det? Hur många icke-tomma delmängder finns? Hur många delmängder A som har precist 2 element finns det?

(4) Låt A vara en mängd av n element. Hur många olika relationer finns på A? Hur många olika ekvivalensrelationer finns på $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ med exakt två klasser?

(5) Definiera talföljden $\{L(n); n = 2, 3, \cdots\}$ enligt följande:

$$\begin{cases} L(2) = 1, \\ L(n) = n - 1 + L(n-1), \quad n \geq 3. \end{cases}$$

Bevisa med induktion att $L(n) = \binom{n}{2}$.

(6) Låt p vara ett primtal och $1 \leq k \leq p - 1$. Bevisa att $\binom{p}{k}$ är delbart med p.

(7) Låt $n \geq$ vara ett heltal.
(a) Bevisa att för alla heltal k gäller det att $k^3 + (n-k)^3$ är delbart med n.
(b) Låt n vara udda. Bevisa m.h.a (a) att $1^3 + 2^3 + \cdots + (n-2)^3 + (n-1)^3$ är delbart med n. (Ledning: Omgruppera parvis de $(n-1)$ stycken tal.)

(8) (a) Bestäm Eulertalen $\Phi(10)$, $\Phi(100)$. Bestäm resten av (b) 7^{90} vid division med 10, (c) 10^{100} vid division av 7.

(9) Bevisa att 5 delar $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ för alla positiva n. Delar 5 alltid $2^{n+1} + 3^{n+1}$ för alla positiva n?

(10) Hur många 7-bokstavliga "ord" kan man bilda med bokstäverna i ordet $SANNING$? Hur många med tre N:en tillsammans?

(11) Det skall väljas 3 representater ur en föräldraförening av 10 familjer med 10 pappor och 10 mammor. Det ställer ett krav att det skall vara högst en representat från samma familj. Hur många olika val finns det?

(12) (a) Låt $K_{4,4}$ vara den fullständiga bipartita grafen mellan den 4 noderna $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ och 4 noderna $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Hur många olika enkelvägar finns det från noden a_1 till noden a_4?

[1] Repetitionsövningarna här kan vara i något mått svårare än genomsnitta uppgifter i boken. Var inte orolig om du inte kan lösa dem. Repetera då uppgifterna i boken och reflektera dina förstålser/förmåga på de lösta/olösta problem .

(b)Låt $K_{m,n}$ vara nu den fullständiga bipartita mellan den m noderna $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ och n noderna $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ med $m \leq n$. Skriv en allmän summeringsformel för antalet enklar vägar mellan a_1 till a_m.

(13) Lös följande ekvation/ekvationsystem (a) $6x + 9y = 15$. (b) $x \equiv 4 \quad mod\, 5, \quad x \equiv 6 \quad mod\, 7$.

(14) Avgör om följande ekvationer i Z_{12} är lösbar och i så fall lös dem: (a) $[5]x = 1$, (b) $[2]x = 1$, (c) $[2]x = [4]x$.

Svar: (1): F,F, S. (2): S, S, S, F, F, S, F.

(4): 2^{n^2}. 15.

(6): Ledning. Skriv talet $\binom{p}{k} = \frac{p\,(p-1)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{pa}{b}$. Bevisa b delar a.

(8): (a) 4 och 40. (b) 9. (c) 4.

(9): Ledning. Räkna mod 5.

(10): 840. 120

(11): 980: (3 mammor: $\binom{10}{3}$; 2 mammor och 1 pappa: $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1}$; 1 mamma och 2 pappor: $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2} = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{1}$; 3 pappor: $\binom{10}{3}$; Totalt $2(\binom{10}{3} + \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2}) = 980$.

(12): (a) 76. (b) $\sum_{k=1}^{m-2} P(n,k)P(m-2,k-1)$ Eller $\sum_{k=1}^{m-2} \binom{n}{k} k! \binom{m-2}{k-1}(k-1)!$. (Där $P(r,s)$ är antalet permutationer av s stycken element av totalt r stycken element.)

(13): (a). $x = 1 + 3n, y = 1 - 2n$. (b) $x = 34 + 35n$.

(14): (a). $x = [5]$, (b) Ej lösbar (c). $x = [6]$.