Extra uppgifter induktion, Diskret matematik IT, HT2012

1. Visa att
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} = \frac{n+1}{2n+6}$$
för alla naturliga tal n.

2. Vi definierar (som vanligt) Fibonacci-talen enligt följande:
$$\begin{cases} F(0) = 0, \\ F(1) = 1, \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ om } n \geq 2. \end{cases}$$
Visa att dessa satisfierar likheten
$$\sum_{i=1}^{n} F(2i-1) = F(2n),$$
för alla naturliga tal n.

3. Vi definierar en talföljd $L(n)$ enligt följande:
$$\begin{cases} L(0) = 0, \\ L(1) = 1, \\ L(n) = 2L(n-1) - L(n-2), \text{ om } n \geq 2. \end{cases}$$
Visa att $L(n) = n$ för alla naturliga tal n.

4. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$$
för alla positiva heltal n.

5. Vi definierar en talföljd $L(n)$ enligt följande:
$$\begin{cases} L(0) = 0, \\ L(1) = 1, \\ L(n) = 2L(n-2) + 1, \text{ om } n \geq 2. \end{cases}$$
Visa att $L(2n) = 2^n - 1$ för alla naturliga tal n.

6. En följd definieras rekursivt genom:
$$\begin{cases} A_0 = 1 & \\ A_{2n-1} = A_{2n-2} + 1 & n \geq 1, \\ A_{2n} = 2A_{2n-1} & n \geq 1. \end{cases}$$
Visa att $A_{2n} = 3 \cdot 2^n - 2$ och $A_{2n+1} = 3 \cdot 2^n - 1$ för alla naturliga tal n.

7. Visa att $2^n < n!$ för alla naturliga tal $n > 3$.

8. Visa att
$$\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)=\frac{n+1}{2n},$$
för alla naturliga tal $n > 1$.

9. Vi definierar Lucas-talen med startvärden a och b att vara talföljden $L(n)$ som definieras rekursivt genom
$$\begin{cases} L(1)=a, \\ L(2)=b, \\ L(n)=L(n-1)+L(n-2), \ n>2. \end{cases}$$
Speciellt ser vi att Fibonacci-talen $F(n)$ är specialfallet då $a = b = 1$. Låt $L(n)$ vara Lucas-talen med startvärden a och b. Visa att då är
$$L(n)=bF(n-1)+aF(n-2)$$
för alla $n > 2$.