Lösningsförslag till "Extra uppgifter induktion", Diskret matematik IT, HT2012

1. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 0$

   Då gäller att

   $$VL = \sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k^2 + 5k + 6} = 1/6 = HL,$$

   och alltså gäller likheten för $n = 0$.

   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt naturligt tal n. Visa att då gäller det också för $n + 1$. Vi får

   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2+5k+6} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+5k+6} + \frac{1}{(n+1)^2+5(n+1)+6} \\ &= \frac{n+1}{2n+6} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{(n+1)(n+4)+2}{2(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n^2+5n+6}{2(n+3)(n+4)} = \frac{(n+3)(n+2)}{2(n+3)(n+4)} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+6},\end{aligned}$$

   och alltså gäller likheten också för $n + 1$.

   Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla naturliga tal.

2. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 0$

   Då gäller att

   $$\sum_{i=1}^{0} F(2i-1) = 0 = F(2 \cdot 0),$$

   och alltså gäller likheten för $n = 0$.

   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt naturligt tal n. Visa att då gäller det också för $n + 1$. Vi får

   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} F(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n} F(2i-1) + F(2(n+1)-1) \\ &= F(2n) + F(2n+1) = F(2n+2) = F(2(n+1))\end{aligned}$$

   och alltså gäller likheten också för $n + 1$.

   Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla naturliga tal.

3. Vi ska visa att $L(n) = n$ för alla naturliga tal n. Vi gör ett bevis med hjälp av total induktion.
   Basfall: $n = 0$ och $n = 1$. Då är likheten trivialt sann per definition av $L(n)$.
   Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för alla naturliga tal k sådana att $k \leq n$ där $n \geq 1$. Vi ska visa att då är det också sant för $n + 1$. Men vi har

$$L(n+1) \quad = \quad 2L(n) - L(n-1) = 2n - (n-1) = n+1,$$

   där den första likheten följer av definitionen av $L(n)$ och den andra av induktionsantagandet.
   Nu följer det induktionsprincipen version 2 att $L(n) = n$ för alla naturliga tal n.

4. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 1$

   Då gäller att

$$VL = \sum_{k=1}^{1} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 2^0 = 1 \text{ och } HL = (1-1) \cdot 2^1 + 1 = 1,$$

   och alltså gäller likheten för $n = 1$.

   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt positivt heltal n. Visa att då gäller det också för $n + 1$. Vi får

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} + (n+1) \cdot 2^n = \\
&= (n-1) \cdot 2^n + 1 + (n+1) \cdot 2^n = 2n \cdot 2^n + 1 = \\
&= ((n+1) - 1) \cdot 2^{n+1} + 1,
\end{aligned}$$

   och alltså gäller likheten också för $n + 1$.

   Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla positiva heltal.

5. Sätt $f(n) = 2^n - 1$. Vi ska visa att $f(n) = L(2n)$ för alla naturliga tal n. Vi gör ett induktionsbevis.
   Basfall: $n = 0$. Vi får $L(2 \cdot 0) = 0$ och $f(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ så alltså är påståendet sant för $n = 0$.
   Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för n. Vi ska visa att då är det också sant för $n + 1$. Men vi har

$$\begin{aligned}
L(2(n+1)) &= L(2n+2) = 2L(2n) + 1 \\
&= 2f(n) + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1 = f(n+1),
\end{aligned}$$

   där den andra likheten följer av definitionen av $L(n)$ och den tredje av induktionsantagandet.
   Nu följer det av induktionsprincipen att $f(n) = L(2n)$ för alla naturliga tal n.

6. Vi visar först att $A_{2n} = 3 \cdot 2^n - 2$ med ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 0$

   Vi har att
$$3 \cdot 2^0 - 2 = 1 = A_0,$$
   och alltså gäller likheten för $n = 0$.

   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt jämnt naturligt tal $2n$. Visa att då gäller det också för $2(n+1)$. Vi får
$$A_{2n+2} = 2A_{2n+1} = 2(A_{2n} + 1) = 2(3 \cdot 2^n - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2,$$
   och alltså gäller likheten också för $2(n+1)$.

   Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla jämna naturliga tal.

   För de udda talen observerar vi bara att $A_{2n+1} = A_{2n} + 1 = 3 \cdot 2^{n+1} - 1$ enligt ovan.

7. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: Vi får i fallet $n = 4$ att $2^4 = 16 < 24 = 4!$ så påståendet är sant för $n = 4$.

   Induktionssteg: Antag att påståendet är sant för något n med $n \geq 4$. Vi ska visa att då är det också sant för $n + 1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet och att $(n + 1) > 4 > 2$ så får vi
$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1},$$
   vilket är precis påståendet för $n + 1$. Därmed följer det av induktionsprincipen att påståendet är sant för alla naturliga tal $n > 3$.

8. Sätt $f(n) = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$ och $g(n) = \frac{n+1}{2n}$. Då ska vi bevisa att $f(n) = g(n)$ för alla naturliga tal $n > 1$. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 2$. Då har vi
$$f(2) = \prod_{i=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = g(2),$$
   så påståendet är sant för $n = 2$.

   Induktionssteg: Antag att det är sant för n och visa att då är det också sant för $n + 1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet så får vi
$$\begin{aligned} f(n+1) &= \prod_{i=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= f(n) \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = g(n) \cdot \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = g(n+1). \end{aligned}$$

Enligt induktionsaxiomet är påståendet därmed sant för alla positiva heltal $n > 1$.

9. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Vi behöver två fall $n = 3$ och $n = 4$. Vi har

$$\begin{aligned} L(3) &= L(2) + L(1) = b + a \\ bF(3-1) + aF(3-2) &= b + a \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} L(4) &= L(3) + L(2) = (b + a) + b = 2b + a \\ bF(4-1) + aF(4-2) &= b \cdot 2 + a \cdot 1 = 2b + a \end{aligned}$$

så båda basfallen stämmer.

Induktionssteg: Antag att det är sant för alla k sådana att $k \leq n$ där $n \geq 4$ och visa att då är det också sant för $n + 1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet och rekursionen för Fibonacci-talen så får vi

$$\begin{aligned} L(n+1) &= L(n) + L(n-1) \\ &= bF(n-1) + aF(n-2) + bF(n-1-1) + aF(n-1-2) \\ &= b(F(n-1) + F(n-2)) + a(F(n-2) + F(n-3)) \\ &= bF(n) + aF(n-1) \end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.

Enligt induktionsprincipen är påståendet därmed sant för alla positiva heltal $n > 2$.