MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2013-04-05.
Lösningar

1. (a) Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned}
1254 &= 1 \cdot 789 + 465 \\
789 &= 1 \cdot 465 + 324 \\
465 &= 1 \cdot 324 + 141 \\
324 &= 2 \cdot 141 + 42 \\
141 &= 3 \cdot 42 + 15 \\
42 &= 2 \cdot 15 + 12 \\
15 &= 1 \cdot 12 + 3 \\
12 &= 4 \cdot 3.
\end{aligned}$$

Från detta drar vi slutsatsen att $\mathrm{sgd}(1254, 789) = 3$.

(b) Eftersom 3 delar både 1254 och 789 så kommer 3 att dela $1254x+789y$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$. Därför kommer aldrig $1254x + 789y = 5$ om $x, y \in \mathbb{Z}$ och alltså saknas det sådana lösningar.

2. (a) $6450 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 43$

(b) Från multiplikativiteten hos Eulers Φ-funktion och att

$$\Phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$$

om p är ett primtal samt primatalsfaktoriseringen från första deluppgiften får vi att

$$\Phi(6450) = \Phi(2) \cdot \Phi(3) \cdot \Phi(5^2) \cdot \Phi(43) = 1 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 4) \cdot 42 = 1680.$$

(c) Enligt Eulers sats vet vi att

$$7^{\Phi(6450)} = 7^{1680} \equiv 1 \pmod{6450},$$

ty $\mathrm{sgd}(7, 6450) = 1$. Det ger att

$$7^{1681} \equiv 7 \pmod{6450}$$

så svaret är 7.

3. Först väljer vi 4 personer till ett lag. Det går på
$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 55 \cdot 9 = 495$$
sätt. Därefter är det 8 personer att välja på till det andra laget som då kan väljas på
$$\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 14 \cdot 5 = 70$$
sätt. Nu gäller det att inte missa att vi kan permutera de tre lagen och få samma uppdelning av personer på $3! = 6$ olika sätt. Det totala antalet olika uppdelningar blir därför
$$\binom{12}{4}\binom{8}{4} \cdot \frac{1}{6} = 165 \cdot 35 = 5775.$$

4. Vi visar först att $A_{2n} = 3 \cdot 2^n - 2$ med ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 0$

   Vi har att
$$3 \cdot 2^0 - 2 = 1 = A_0,$$
   och alltså gäller likheten för $n = 0$.

   Induktionssteget: Antag nu att det gäller för ett fixt jämnt naturligt tal $2n$. Visa att då gäller det också för $2(n+1)$. Vi får
$$A_{2n+2} = 2A_{2n+1} = 2(A_{2n} + 1) = 2(3 \cdot 2^n - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2,$$
   och alltså gäller likheten också för $2(n+1)$.

   Enligt induktionsprincipen gäller därmed likheten för alla jämna naturliga tal.

   För de udda talen observerar vi bara att $A_{2n+1} = A_{2n} + 1 = 3 \cdot 2^n - 1$ enligt ovan.

5. Argumentet är giltigt och en motivering kan se ut så här.

   Den fjärde premissen ger q. Detta ger i sin tur $p \vee q$ som tillsammans med första premissen ger r. Detta tillsammans med andra premissen ger t. Slutligen ger nu detta tillsammans med tredje premissen s så argumentet är giltigt.

6. (a) Den är **reflexiv**, ty $a \leq a$ och $s(a) \leq s(a)$ för alla a så $a\mathcal{R}a$. Den är **antisymmetrisk**, ty om $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}a$ så är speciellt $a \leq b$ och $b \leq a$, så $a = b$. Den är **transitiv**, ty $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$ är ekvivalent med att $a \leq b \leq c$ och $s(a) \leq s(b) \leq s(c)$. Detta ger ju tack vare att $\leq$ är transitiv att $a \leq c$ och $s(a) \leq s(c)$, dvs. $a\mathcal{R}c$.

(b) Nej, ty t.ex. $9 < 10$ men $s(9) = 9 > 1 = s(10)$ så 9 och 10 är inte alls relaterade till varandra.

7. (a) Alla element i $[(1,0)] = \{(x,0) : x \neq 0\}$ och i $[(0,0)] = \{(0,0)\}$ ger värdet 0. Alla andra ekvivalensklasser innehåller bara element (x,y) med $y \neq 0$. Tag två godtyckliga element (x,y) och (cx,cy) ur samma ekvivalensklass $(c, y \neq 0)$. Eftersom $\frac{x}{y} = \frac{cx}{cy}$ så ger f samma värde för de båda elementen i $[(x,y)]$ och alltså beror inte värdet av f på vilken representant man väljer.

(b) T.ex. är $(1,1)$ och $(2,2)$ i samma ekvivalensklass, men g ger värdena 1 respektive 4.

(c) Den är inte injektiv, ty $[(0,0)] \neq [(1,0)]$ men $f([(0,0)]) = f([(1,0)])$.

(d) Den är surjektiv, ty givet $r \in \mathbb{R}$ så är $f([(r,1)]) = r$.

8. (a) Vi beräknar $s(n)$ för alla $1 \leq n \leq 10$:

$$
\begin{aligned}
s(1) &= 0 \\
s(2) &= 1 \\
s(3) &= 1 \\
s(4) &= 1+2=3 \\
s(5) &= 1 \\
s(6) &= 1+2+3=6 \text{ Perfekt!} \\
s(7) &= 1 \\
s(8) &= 1+2+4=7 \\
s(9) &= 1+3=4 \\
s(10) &= 1+2+5=8.
\end{aligned}
$$

Vi ser att bara 6 är perfekt.

(b) Eftersom $q = 2^p - 1$ är ett primtal så har n bara två primtalsdelare: 2 och q. Det betyder att alla positiva delare till n som är mindre än n ges av

$$\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}, q, 2q, \ldots, 2^{p-2}q\}.$$

Vi får att

$$
\begin{aligned}
s(n) &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^k + \sum_{k=0}^{p-2} 2^k q = \frac{2^p - 1}{2-1} + q\frac{2^{p-1}-1}{2-1} \\
&= 2^{p-1}(2+q) - (1+q) = 2^{p-1}(2^p+1) - 2^p \\
&= 2^{p-1}(2^p + 1 - 2) = 2^{p-1}(2^p - 1) = n,
\end{aligned}
$$

och alltså är n perfekt.