MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2013-08-21.
Lösningar

1. (a) Vi använder Euklides algoritm och får

$$\begin{aligned}
4485 &= 1 \cdot 3042 + 1443 \\
3042 &= 2 \cdot 1443 + 156 \\
1443 &= 9 \cdot 156 + 39 \\
156 &= 4 \cdot 39.
\end{aligned}$$

Alltså är $\mathrm{sgd}(3042, 4485) = 39$.

(b) Om vi startar från näst sista likheten och successivt ersätter med ekvationen ovanför så får vi

$$\begin{aligned}
39 &= 1443 - 9 \cdot 156 = 1443 - 9(3042 - 2 \cdot 1443) \\
&= -9 \cdot 3042 + 19 \cdot 1443 \\
&= -9 \cdot 3042 + 19(4485 - 3042) = 19 \cdot 4485 - 28 \cdot 3042.
\end{aligned}$$

Alltså är $19 \cdot 4485 - 28 \cdot 3042 = \mathrm{sgd}(3042, 4485)$.

2. Vi har möjligheterna att antalet svarta bollar är 0, 2 eller 4. Man kan välja k svarta bollar på $\binom{11}{k}$ sätt och $5-k$ vita bollar på $\binom{7}{5-k}$ sätt. Totalt blir det alltså

$$\binom{11}{0}\binom{7}{5} + \binom{11}{2}\binom{7}{3} + \binom{11}{4}\binom{7}{1} = 1 \cdot 21 + 55 \cdot 35 + 330 \cdot 7 = 4256.$$

3. (a) Vi har att $1718 = 156 \cdot 11 + 2$ så $1718 \equiv 2 \pmod{11}$. Om vi tar successiva potenser av 2 modulo 11 så får vi

$$\begin{aligned}
&2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 \equiv 5,\ 2^5 \equiv 10,\ 2^6 \equiv 9 \\
&2^7 \equiv 7,\ 2^8 \equiv 3,\ 2^9 \equiv 6,\ 2^{10} \equiv 1.
\end{aligned}$$

Det ger att modulo 11 får vi att

$$\begin{aligned}
1718^{1632} &\equiv 2^{1632} = 2^{1630} \cdot 2^2 \\
&= (2^{10})^{163} \cdot 4 \equiv 1^{163} \cdot 4 = 4.
\end{aligned}$$

Svaret är alltså 4.

(b) Vi såg ovan att $1718 \equiv 2 \pmod{11}$ och att det minsta positiva heltalet x som uppfyller $2^x \equiv 5 \pmod{11}$ är $x = 4$. Dessutom blev $2^n \equiv 1 \pmod{11}$ första gången då $n = 10$. Det betyder att $2^{10+4} = 2^{10} \cdot 2^4 \equiv 5$, $2^{20+4} = (2^{10})^2 \cdot 2^4 \equiv 5$ etc. Sammanfattningsvis får vi att lösningarna till ekvationen är precis alla positiva heltal x som är kongruenta med 4 modulo 10.

Anmärkning: Det faktum att $2^{10} \equiv 1$ följer av Eulers sats så vi kunde besparat oss lite besvär genom att bara beräkna potenser t o m 2^5.

4. Låt t ex $P(x, y)$ vara predikatet $x > y$ och sätt universum till $\mathbb{R}$ för både x och y. Då gäller för alla x att det finns y sådant att $x > y$, vi kan t ex ta $y = x - 1$. Alltså är
$$\forall x \exists y P(x, y)$$
en sann utsaga. Däremot finns det inget y sådant att $x > y$ för alla x. Ett sådant y skulle vara ett minsta reellt tal vilket ju inte existerar, t ex är $y - 1 \not> y$. Alltså är
$$\exists y \forall x P(x, y)$$
en falsk utsaga

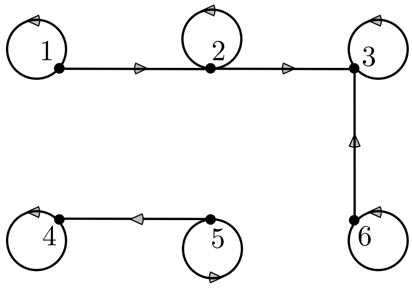
5. Sätt $f(n) = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$ och $g(n) = \frac{n+1}{2n}$. Då ska vi bevisa att $f(n) = g(n)$ för alla naturliga tal $n > 1$. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: $n = 2$. Då har vi
$$f(2) = \prod_{i=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2} = g(2),$$
så påståendet är sant för $n = 2$.

Induktionssteg: Antag att det är sant för n och visa att då är det också sant för $n + 1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet så får vi
$$\begin{aligned} f(n+1) &= \prod_{i=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= f(n) \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = g(n) \cdot \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} \\ &= \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} = g(n+1). \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet därmed sant för alla heltal $n > 1$.

6. (a)



Figur 1: Riktade grafen till första deluppgiften.

(b) Den minsta ekvivalensrelation som innhåller $\mathcal{R}$ är den med ekvivalensklasserna $\{1,2,3,6\}$ och $\{4,5\}$.

(c) Den minsta partiella ordning som innehåller $\mathcal{R}$ är $\mathcal{R} \cup \{(1,3)\}$.

7. (a) Villkoret för att vara reflexiv är att $a\mathcal{R}_n a$ för alla $a \in \mathbb{Z}$. Men

$$a\mathcal{R}_n a \Leftrightarrow n \mid a + a \Leftrightarrow n \mid 2a$$

och detta gäller för alla a om och endast om $n \mid 2$, d v s $n \in \{1,2\}$.

(b) Den är alltid symmetrisk ty addition är kommutativ så

$$a\mathcal{R}_n b \Leftrightarrow n \mid a + b \Leftrightarrow n \mid b + a \Leftrightarrow b\mathcal{R}_n a.$$

(c) Den är aldrig antisymmetrisk, ty t ex har vi att $n\mathcal{R}_n 2n$ och $2n\mathcal{R}_n n$ och $n \neq 2n$ för alla n.

(d) Antag att $a\mathcal{R}_n b$ och $b\mathcal{R}_n c$. Då finns $k, l \in \mathbb{Z}$ sådana att $a + b = nk$ och $b + c = nl$. Vi får då att

$$a + c = (a + b) + (b + c) - 2b = n(k + l) - 2b.$$

Villkoret att $a\mathcal{R}_n c$ är alltså ekvivalent med att $n \mid 2b$. Men detta ska gälla för alla b, så enda möjligheterna är $n \in \{1,2\}$ för vilka $\mathcal{R}_n$ är transitiv.

8. **Sats:** Ett positivt heltal n kan skrivas som differensen mellan kvadraterna av två heltal om och endast om n är udda eller $4 \mid n$

Bevis: Låt n vara ett positivt heltal. Om n är differensen mellan kvadraten av två heltal så är

$$n = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

för $x, y \in \mathbb{Z}$. Om x och y båda är udda eller båda är jämna, så är både $x+y$ och $x-y$ jämna. Då kommer $4 \mid n$. Om x och y inte är kongruenta modulo 2 så kommer $x+y$ och $x-y$ båda att vara udda så då kommer också n att vara udda. Vi har nu visat att villkoren i satsen är nödvändiga.

Vi ska visa att de också är tillräckliga genom att ge konkreta exempel på x och y. Antag först att n är udda. Om vi väljer $x = y + 1$ så får vi

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 1 \cdot (2y+1) = 2y+1,$$

så vi kan få *alla* udda tal genom att ta $y = 0, 1, 2, \ldots$ och $x = y + 1$.

Antag nu att $4 \mid n$. Om vi väljer $x = y + 2$ så får vi

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 2 \cdot (2y+2) = 4(y+1),$$

så vi kan få *alla* multipler av 4 genom att ta $y = 0, 1, 2, \ldots$ och $x = y + 2$. Alltså är villkoren i satsen också tillräckliga.