MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2013-04-05.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Cornelia Jareteg, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. (a) Beräkna $\text{sgd}(1254, 789)$.
   (b) Bestäm alla lösningar $x, y \in \mathbb{Z}$ till $1254x + 789y = 5$. (6p)

2. (a) Primtalsfaktorisera 6450.
   (b) Bevisa att $\Phi(6450) = 1680$ där Φ är Eulers Φ-funktion.
   (c) Bestäm det minsta positiva tal n som är sådant att $7^{1681} \equiv n \pmod{6450}$. (6p)

3. Tolv personer ska spela innebandy och ska därför dela upp sig i 3 lag med 4 personer i varje. På hur många olika sätt går det att dela upp personerna? (6p)

4. En följd definieras rekursivt genom:

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_{2n-1} = A_{2n-2} + 1 & n \geq 1, \\ A_{2n} = 2A_{2n-1} & n \geq 1. \end{cases}$$

   Visa att $A_{2n} = 3 \cdot 2^n - 2$ och $A_{2n+1} = 3 \cdot 2^n - 1$ för alla naturliga tal n. (6p)

5. Avgör om följande argument är giltigt.

$$\begin{array}{r} (p \vee q) \to r \\ \neg r \vee t \\ t \to s \\ q \wedge u \\ \hline s \end{array}$$

   Om det är giltigt så ge en motivering till det och om det inte är det så ge ett motexempel. (6p)

Var god vänd!

6. Siffersumman, $s(n)$, av ett naturligt tal n med representationen $a_1a_2\ldots a_n$ i bas 10 är $\sum_{i=1}^{n} a_i$, så t ex är $s(397) = 3 + 9 + 7 = 19$. Vi definierar en relation på $\mathbb{N}$ genom
$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a \leq b \text{ och } s(a) \leq s(b).$$
   (a) Visa att detta är en partiell ordning på $\mathbb{N}$.
   (b) Är detta en total ordning? Motivera ditt svar. (6p)

7. Vi definierar en ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{R}^2$ genom:
$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists c \neq 0 \;\; x_1 = cx_2 \text{ och } y_1 = cy_2.$$
Låt E vara mängden av ekvivalensklasser m.a.p. $\mathcal{R}$ och låt $[(x, y)]$ beteckna ekvivalensklassen av (x, y).
   (a) Visa att
$$f([(x,y)]) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{om } y \neq 0, \\ 0 & \text{om } y = 0, \end{cases}$$
   ger en väldefinierad funktion $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, dvs. att definitionen inte beror på vilken representant man väljer i en ekvivalensklass.
   (b) Visa att
$$g([(x,y)]) = xy$$
   inte ger en väldefinierad funktion $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
   (c) Är funktionen f injektiv?
   (d) Är funktionen f surjektiv? (8p)

8. Låt n vara ett positivt heltal. Vi definierar divisorsumman av n, $s(n)$, som summan av alla positiva delare till n som är **mindre** än n. Till exempel är
$$s(20) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22.$$
Man säger att ett tal n är *perfekt* om $s(n) = n$.
   (a) Bestäm alla perfekta tal mindre än eller lika med 10. Motivera ditt svar.
   (b) Antag att $2^p - 1$ är ett primtal (där p är ett primtal). Visa att i så fall är
$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$
   perfekt. (Tips: Försök bestämma delarna till n och utnyttja att du får geometriska summor när du summerar dem.) (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 20/4. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 9:00 och 13:00 varje vardag utom onsdagar.

LYCKA TILL! Stefan.