MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2013-08-21.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Dawan Mustafa, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. (a) Beräkna $\mathrm{sgd}(3042, 4485)$ med Euklides algoritm.

   (b) Bestäm heltal x och y sådana att $3042x + 4485y = \mathrm{sgd}(3042, 4485)$. (6p)

2. Det finns 11 svarta och 7 vita numrerade bollar. Med andra ord så är alla bollar olika. Vi ska välja ut 5 bollar så att det blir ett jämnt antal svarta (och följdaktligen ett udda antal vita) bollar. På hur många sätt kan man göra detta? Ange antalet som ett heltal för att få full poäng. (6p)

3. (a) Beräkna resten vid division med 11 för 1718^{1632}.

   (b) Bestäm alla positiva heltalslösningar x till ekvationen

$$1718^x \equiv 5 \pmod{11}.$$

(7p)

4. Ge exempel på predikat $P(x, y)$ sådant att

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

är en sann utsaga, men

$$\exists y \forall x P(x, y)$$

är en falsk utsaga. Glöm inte att ange universum för x respektive y. Motivera kort ditt svar. (6p)

5. Visa att

$$\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n},$$

för alla heltal $n > 1$. (6p)

Var god vänd!

6. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ som har relationsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Rita relationsgrafen till $\mathcal{R}$.
   (b) Bestäm den minsta relation som innehåller $\mathcal{R}$ och som är en ekvivalensrelation.
   (c) Bestäm den minsta relation som innehåller $\mathcal{R}$ och som är en partiell ordning. (7p)

7. Fixera ett positivt heltal n. För detta heltal definierar vi en relation $\mathcal{R}_n$ på $\mathbb{Z}$ genom

$$a\mathcal{R}_n b \iff n \mid a + b.$$

   för $a, b \in \mathbb{Z}$.

   (a) För vilka n är $\mathcal{R}_n$ reflexiv?
   (b) För vilka n är $\mathcal{R}_n$ symmetrisk?
   (c) För vilka n är $\mathcal{R}_n$ antisymmetrisk?
   (d) För vilka n är $\mathcal{R}_n$ transitiv? (6p)

8. Vilka positiva heltal kan skrivas som differensen mellan kvadraterna av två heltal. Formulera som en sats och försök bevisa den. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 11 september. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 9:00 och 13:00 varje vardag utom onsdag.

LYCKA TILL! Stefan.