Veckoblad 1, Diskret matematik IT, HT2012

Under första veckans tre föreläsningar repeteras, fördjupas och utvidgas materialet i kapitel 1-3 som (delvis) ingick i introduktionskursen. Kapitel 2 om mängder kommer inte att föreläsas utan enbart repeteras på övningarna.

Viktiga begrepp och resultat under veckan

- Satslogik med utsagor.
- Logiska operatorerna (konnektiven) konjunktion ("och"), disjunktion ("eller"), negation ("inte"), implikation och ekvivalens.
- Begreppen tautologi, logisk ekvivalens och logisk implikation.
- Begreppet logiskt argument med hypoteser och slutsats.
- Begreppet predikat och kvantorerna $\forall$ ("för alla") och $\exists$ ("det existerar").
- Begreppen mängd, delmängd och äkta delmängd.
- De speciella mängdbeteckningarna $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$.
- Mängdoperatorerna snitt, union, mängddifferens, komplement och symmetrisk mängddifferens.
- Begreppen kartesisk produkt och potensmängd.
- Begreppen funktion, definitionsmängd, målmängd, bild, värdemängd och graf.
- Funktionsegenskaperna injektiv, surjektiv, bijektiv och inverterbar.
- Sammansättning av funktioner.
- Begreppen binär operator och unär operator.
- Operatorsbegreppen identitet, invers, kommutativ, associativ och involution.
- Summasymbolen och produktsymbolen.
- Begreppet relation från en mängd till en annan, samt speciellt på en mängd.
- Relationsegenskaperna reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk respektive transitiv.
- Begreppen ekvivalensrelation, ekvivalensklasser och partition och sambandet mellan dessa.

- Begreppen partiell ordning och total ordning.
- Begreppen minimalt element, minsta element, maximalt element och största element i en partiell ordning.

Grundläggande kunskapsmål under veckan

- Göra sanningsvärdestabell för logiska formler.
- Avgöra om logiska formler är ekvivalenta.
- Överföra utsagor i textform till symbolisk logisk form.
- Avgöra om ett logiskt argument är giltigt.
- Negera kvantifierade predikat.
- Avgöra vilka element som ingår i en mängd definierad utifrån egenskaper hos elementen.
- Illustrera mängder med Venn-diagram.
- Beräkna antalet element i en mängd givet information om relationer med andra mängder.
- Avgöra om mängder är lika.
- Bestämma värdemängden för en funktion.
- Avgöra om en funktion är injektiv, surjektiv och/eller bijektiv.
- Avgöra om två funktioner är lika.
- Beräkna sammansättningen av två funktioner.
- Avgöra vilka egenskaper en operator har.
- Visa att en relation är en ekvivalensrelation.
- Bestämma ekvivalensklasserna.
- Visa att en relation är en partiell ordning.
- Bestämma alla minimala, minsta, maximala samt största element för en partiell ordning.

Gruppövningar

1. Universum är mängden $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ av alla naturliga tal. Låt $P(n)$ vara följande predikat
$$P(n): \ n \text{ är delbart med } 7.$$
Avgör om vardera av följande påståenden är sant eller falskt
   (a) $P(2)$
   (b) $P(14)$
   (c) $\exists n \ : \ P(n)$
   (d) $\forall n \ : \ P(n)$
   (e) $\forall n \ : \ [P(n) \to \neg P(n+1)]$

2. Bevis eller motexempel krävs som svar på följande två frågor:
   (a) Är $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Longrightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ en korrekt logisk härledning?
   (b) Är $(\forall x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Longrightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ en korrekt logisk härledning?

3. Låt "universum" vara mängden av alla båtar i Västköpings hamn. Skriv följande utsagor på symbolisk logisk form och illustrera med hjälp av Euler-diagram (d v s en skiss med potatisformade mängder).
   - Alla segelbåtar är vackra.
   - Alla vackra båtar är gamla.
   - Det finns inga gamla motorbåtar.

   Vad kan du dra för slutsatser? Formulera dina slutsatser i ord och med predikatlogik.

4. Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och sätt
$$S = \{(A, B) : A \subseteq B \subseteq X\}.$$
Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på S genom
$$(A, B)\mathcal{R}(C, D) \Longleftrightarrow A = B \cap C \text{ och } B \subseteq D.$$
Visa att $\mathcal{R}$ är en partiell ordning på S.

5. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{R}^2$ genom

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad (a+b)^2 = (c+d)^2.$$

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

   (b) Skissa i ett koordinatsystem ekvivalensklasserna av $(0,0)$ och $(1,1)$ m a p $\mathcal{R}$.

   (c) Ge en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ som innehåller exakt en representant ur varje ekvivalensklass m a p $\mathcal{R}$.