

## Veckoblad 6, Diskret matematik IT, HT2012

### Viktiga begrepp och resultat under veckan

- Begreppen graf och riktad graf med noder och kanter.
- Begreppen grad, ingrad och utgrad hos en nod.
- Begreppen delgraf och inducerad delgraf.
- Begreppen väg, enkel väg och cykel.
- Begreppen sammanhängande, starkt sammanhängande, maximalt sammanhängande och komponent.
- Begreppen fullständig graf och bipartit graf.
- Begreppet träd.
- Begreppen Eulerväg och Eulercykel.
- Existerar Eulercykel om och endast om varje nod har jämn grad.
- Begreppen relationsgraf och Hassediagram.
- Begreppet grannmatris och sambandet mellan vägar och potenser av matrisen.
- Begreppen isomorfi mellan grafer och isomorfa grafer.

### Grundläggande kunskapsmål under veckan

- Växla mellan de olika sätten att representera en graf: mängder, ritad och matris.
- Avgöra om en graf är sammanhängande, ett träd, har Eulerväg och/eller Eulercykel, är bipartit.
- Rita relationsgraf för en graf.
- Rita Hassediagrammet för en partiell ordning.
- Beräkna antalet vägar mellan två noder med hjälp av grannmatrisen.
- Avgöra om två grafer är isomorfa och i sådant fall bestämma en isomorfi.

### Gruppövningar

1. Låt  $G = (V, E)$  vara grafen med noderna  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  och kanterna

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

- (a) Rita upp grafen.
- (b) Bestäm grannmatrisen.
- (c) Är grafen sammanhängande?
- (d) Är grafen bipartit?
- (e) Använd grannmatrisen för att beräkna antalet vägar av längd 3 respektive längd 4 från 2 till 1. (Kan man använda analysen ni gjorde i förra uppgiften för att lösa en av dessa?)
- (f) Finns det någon Eulercykel eller Eulerväg i grafen?
- (g) Är grafen ett träd?

Tänk på att ni ska ha en tydlig motivering för alla svar ni funnit.

2. Givet ett positivt heltal  $n$  låt  $D_n$  vara mängden av alla positiva delare till  $n$ . Då är  $(D_n, |)$  en partiellt ordnad mängd (ni behöver inte visa detta).
  - (a) Rita Hasse-diagrammet för  $(D_5, |)$ ,  $(D_{125}, |)$ ,  $(D_{70}, |)$  och  $(D_{120}, |)$
  - (b) Låt  $n = pqr$  där  $p$ ,  $q$  och  $r$  är olika primtal. Rita Hasse-diagrammet för  $(D_n, |)$ .
  - (c) Försök karakterisera de tal  $n$  för vilka  $(D_n, |)$  blir ett träd.
3. En Hamiltoncykel i en graf är en cykel som passerar varje nod exakt en gång.
  - (a) Hur många olika Hamiltoncykler finns i den fullständiga grafen med  $n$  noder?
  - (b) Visa att den fullständiga bipartita grafen  $K_{m,n}$  har en Hamiltoncykel om och endast om  $m = n$ .
4. En *plan graf* är en graf som går att rita på ett plan utan att några kanter korsar varandra.
  - (a) Rita några (sammanhängande) plana grafer och räkna antalet noder, kanter, regioner  $n, k, r$  (en region är ett sammanhängande område i planet som omringas av grafens kanter).
  - (b) Hittar ni något samband mellan  $n + r$  och  $k$ ?
  - (c) Skissa på ett bevis för sambandet. Ni behöver inte ha med alla detaljer, men huvuddragen i beviset. Tips: Prova med induktion över antalet kanter.
5. Låt  $G = (V, E)$  vara en *sammanhängande* bipartit graf där  $V = A \cup B$  är en uppdelning av nodmängden så att varje kant har en nod i  $A$  och en nod i  $B$ . Antag också att  $\|A\| = a$  och  $\|B\| = b$ .
  - (a) Vad är det minsta antal kanter som  $G$  kan innehålla?
  - (b) Vad är det högsta antal kanter som  $G$  kan innehålla?