MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2015-04-16.
Lösningar

1. Om t är sann så ger andra premissen att p är sann. Om t är falsk ger fjärde premissen att q är sann. Eftersom t antingen är sann eller falsk så följer det att antingen p eller q är sann. Därmed är $p \vee q$ sann och då ger första premissen att s är sann. Alltså är argumentet giltigt.

2. (a) Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 1254 &= 1 \cdot 789 + 465 \\ 789 &= 1 \cdot 465 + 324 \\ 465 &= 1 \cdot 324 + 141 \\ 324 &= 2 \cdot 141 + 42 \\ 141 &= 3 \cdot 42 + 15 \\ 42 &= 2 \cdot 15 + 12 \\ 15 &= 1 \cdot 12 + 3 \\ 12 &= 4 \cdot 3. \end{aligned}$$

   Från detta drar vi slutsatsen att $\mathrm{sgd}(1254, 789) = 3$.

   (b) Eftersom 3 delar både 1254 och 789 så kommer 3 att dela $1254x+789y$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$. Därför kommer aldrig $1254x + 789y = 7$ om $x, y \in \mathbb{Z}$ och alltså saknas det sådana lösningar.

3. Sätt $f(n) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1)$. Då ska vi bevisa att $f(n) = n^3$ för alla positiva heltal. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: $n = 1$. Då har vi

$$f(1) = \sum_{k=1}^{1}(3k^2 - 3k + 1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 = 1^3,$$

   så påståendet är sant för $n = 1$.

   Induktionssteg: Antag att det är sant för n och visa att då är det också sant för $n + 1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet så får vi

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1}(3k^2 - 3k + 1) \\ &= f(n) + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 6n + 3 - 3n - 3 + 1 = n^3 + 3n^3 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3. \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen är påståendet därmed sant för alla positiva heltal.

4. (a) Välja sex bland fjorton kan göras på

$$\binom{14}{6} = 3003$$

olika sätt.

(b) Välja tre med ljus choklad bland åtta kan göras på

$$\binom{8}{3} = 56$$

olika sätt och välja tre med mörk choklad bland sex kan göras på

$$\binom{6}{3} = 20$$

olika sätt. Totalt blir det $56 \cdot 20 = 1120$ olika sätt.

(c) Det är snabbast att räkna ut de varianter som inte är tillåtna och subtrahera detta från svaret i a-uppgiften. De som inte är tillåtna är med en med ljus choklad eller ingen med ljus choklad.

En med ljus choklad kan väljas på 8 sätt och sedan kan man välja fem med mörk choklad på

$$\binom{6}{5} = 6$$

olika sätt. Totalt $8 \cdot 6 = 48$ varianter med en med ljus choklad. Ingen med ljus choklad kan väljas på bara 1 sätt eftersom då måste man välja alla de sex med mörk choklad.

Svaret på uppgiften blir alltså $3003 - 48 - 1 = 2954$.

5. (a) En relation på A är en delmängd till den kartesiska produkten $A \times A$. Eftersom denna innehåller $4^2 = 16$ element, så finns det 2^{16} olika delmängder och därmed 2^{16} olika relationer på A.

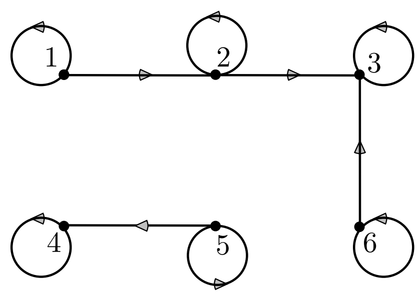
(b) Vi räknar antalet olika ekvivalensrelationer genom att se hur många olika partitioner (uppdelningar i ekvivalensklasser) det finns av A. Detta kommer att ge antalet ekvivakensrelationer, eftersom det finns en bijektion mellan ekvivalensrelationer på och partitioner av en mängd.

Vi gör följande tabell med uppdelning efter hur många element det finns i de olika klasserna:

Element i varje klass	Antal olika
1 1 1 1	1
2 1 1	$\binom{4}{2} = 6$
2 2	$\binom{4}{2}/2 = 3$
3 1	$\binom{4}{1} = 4$
4	1

Totalt blir det alltså $1 + 6 + 3 + 4 + 1 = 15$ stycken olika ekvivalensrelationer.

6. (a)



Figur 1: Riktade grafen till första deluppgiften.

(b) Den minsta ekvivalensrelation som innhåller $\mathcal{R}$ är den med ekvivalensklasserna $\{1, 2, 3, 6\}$ och $\{4, 5\}$.

(c) Den minsta partiella ordning som innehåller $\mathcal{R}$ är $\mathcal{R} \cup \{(1, 3)\}$.

7. Vi har att $143 = 11 \cdot 13$ så vi kan undersöka vad uttrycket blir modulo 13 respektive 11 för att sedan se vad det blir modulo 143 (med kinesiska restsatsen). Kongruenserna modulo 11 och 13 bestämmer unikt kongruensen modulo 143.

Vi använder oss av Eulers sats som säger att $a^{\varphi n} \equiv 1 \pmod{n}$ om a och n är relativt prima. Om vi startar med att undersöka modulo 11 så är $\varphi 11 = 11 - 1 = 10$ och $1991 = 199 * 10 + 1$, så

$$11^{1993} + 13^{1991} \equiv 0 + 13^{199 \cdot 10 + 1} \equiv \left(13^{10}\right) 199 \cdot 13^1 \equiv 13 \equiv 2 \pmod{11}.$$

Modulo 13 får vi, eftersom $1993 = 166 \cdot 12 + 1$, att

$$11^{1993} + 13^{1991} \equiv 11^{166 \cdot 12 + 1} + 0 \equiv \left(11^{12}\right) 166 \cdot 11^1 \equiv 11 \pmod{13}.$$

Vi får att det sökta talet x uppfyller $x \equiv 2 \pmod{11}$ och $x \equiv 11 \pmod{13}$ och med kinesiska restsatsen får vi att alla tal som uppfyller detta system av kongruenser också uppfyller den ursprungliga kongruensen. Man kan använda någon allmän metod för att lösa den, men snabbast är att bara kolla $x = 11, 24, 35, \ldots$ och se när den uppfyller den första kongruensen. Redan $x = 24$ fungerar och därmed är detta det minsta positiva heltal som är kongruent med uttrycket modulo 143

8. Om ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$ är uppfylld så gäller också att $[x]^2 + [y]^2 = [z]^2$ för klasser modulo vilket (positivt) heltal som helst.

   Vi tittar först på ekvationen $[x]^2 + [y]^2 = [z]^2$ modulo 3. Om 3 inte delar x, så är $[x] = [1]$ eller $[x] = [2]$. Eftersom $[1]^2 = [2]^2 = [1]$ betyder det att $[x]^2 = [1]$. Samma sak gäller förstås för y och z. Det betyder att om 3 inte delar något av talen x, y och z så skulle vi få $[1] + [1] = [1]$ vilket så klart inte stämmer. Alltså måste 3 dela något av talen. (I själva verket x eller y.)

   För att visa motsvarande resultat för 5 tittar vi på ekvation modulo 5. Om 5 inte delar x, så är $[x] \in \{[1], [2], [3], [4]\}$. Eftersom $[1]^2 = [4]^2 = [1]$ och $[2]^2 = [3]^2 = [4]$ betyder det att $[x]^2 = [1]$ eller $[x]^2 = [4]$. Därmed är, om 5 varkern delar x eller y, de enda möjligheterna för $[x]^2 + [y]^2$

$$[1] + [1] = [2], \ [1] + [4] = [0] \text{ eller } [4] + [4] = [3].$$

   Den första och sista möjligheten kan inte stämma, eftersom $[z]^2$ inte kan vara [2] eller [3]. Den andra möjligheten betyder att 5 delar z. Alltså måste 5 dela något av talen.