MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2015-08-28.
Lösningar

1. Vi ser att 5 är en faktor så vi dividerar med 5 och får $28175/5 = 5635$. Återigen är 5 en faktor och vi får nu $5635/5 = 1127$. Siffersumman av 1127 är 11 så ej delbart med 3. Vi testar att dividera med 7 och får $1127/7 = 161$. Testar en gång till med 7 och får $161/7 = 23$. Eftersom 23 är ett primtal är vi klara och får faktoriseringen
$$28175 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 23.$$
Enligt formeln för Eulers Phi-funktion får vi att
$$\Phi(28175) = \Phi(5^2) \cdot \Phi(7^2) \cdot \Phi(23) = 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 22 = 18480.$$

2. Vi har $\mathrm{sgd}(12, 21) = 3$ och $3 \mid 186$ så därmed vet vi att det finns heltalslösningar. Vi kan förkorta med 3 och får då $4x + 7y = 62$. Vi bestämmer först en lösning till $4x + 7y = 1$. Den generella metoden är att använda Euklides algoritm, men här ser vi enkelt $x = 2$ och $y = -1$ är en lösning. Därmed är $x = 2 \cdot 62 = 124$ och $y = -1 \cdot 62 = -62$ en lösning till ekvationen. Den allmänna lösningen till ekvationen är då
$$x = 124 - 7n \text{ och } y = -62 + 4n,\ n \in \mathbb{Z}.$$
Vi bestämmer alla möjliga heltal n så att både x och y blir positiva. Det minsta n så att $y > 0$ är $n = 16$ vilket ger $(x, y) = (12, 2)$. Om vi tar $n = 17$ så får vi $(x, y) = (5, 6)$ och för $n > 17$ blir $x < 0$. Lösningar är alltså $(x, y) = (12, 2)$ och $(x, y) = (5, 6)$.

3. Definitionerna finns på sidan 61 i boken.

   Exempel på funktion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ som är

   - injektiv och surjektiv: $f(x) = x$
   - injektiv men inte surjektiv: $f(x) = x^3$
   - inte injektiv men surjektiv: $f(x) = x$ om $x < 0$, $f(x) = x-1$ om $x \geq 0$
   - varken injektiv eller surjektiv: $f(x) = x^2$

4. (a) Argumentet är inte giltigt och ett motexempel är q sann och p falsk.

   (b) Argumentet är giltigt och vi gör ett motsägelsebevis. Antag att slutsatsen s är falsk och att alla premisser är sanna. Då ger fjärde premissen att q är falsk. Om nu q är falsk så ger tredje premissen att p är falsk. Men om både p och q är falska så blir $p \vee q$ falsk vilket ger en motsägelse eftersom det är den första premissen. Alltså är argumentet giltigt.

5. (a) Vi ska välja 4 bland 15 och det kan man göra på
$$\binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1365$$
   sätt.

(b) Vi ska först välja 1 bland 10 och sedan 3 bland 5 och det kan man göra på

$$\binom{10}{1}\binom{5}{3} = 10 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10 \cdot 10 = 100$$

sätt.

(c) Enklast blir att räkna ut komplementet, d v s välja ingen blå boll, och subtrahera detta från svaret i första deluppgiften. Välja ingen blå boll är det samma som att välja 4 vita bollar och det kan man göra på

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$

sätt. Svaret är alltså $1365 - 5 = 1360$.

6. Den högra olikheten följer av att alla termerna i summan är högst $\sqrt{n}$ med strikt olikhet för alla utom den sista termen. Eftersom det finns totalt n stycken termer får vi att

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n} = n \cdot \sqrt{n} = n^{3/2}.$$

För den vänstra olikheten använder vi induktion. Basfall: För $n = 2$ får vi att högerledet är $1 + \sqrt{2}$ och vänsterledet är $\frac{1}{2}2^{3/2} = \sqrt{2}$ så det stämmer då $n = 2$.

Induktionssteg: Antag nu att den önskade olikheten gäller då $n = m$ där m är ett godtyckligt valt heltal större än eller lika med 2. Vi ska visa att den då också gäller då $n = m + 1$. Vi får då för högerledet att

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sqrt{k} = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{k} + \sqrt{m+1} > \frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1},$$

där olikheten följer av induktionsantagandet. Det räcker nu att visa att det sista uttrycket är minst lika stort som $\frac{1}{2}(m+1)^{3/2}$. För att göra det går det lika bra att visa att det gäller för kvadraterna av uttrycken vilket kommer att förenkla det för oss. Vi ska alltså visa att

$$\left(\frac{1}{2}m^{3/2} + \sqrt{m+1}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}(m+1)^{3/2}\right)^2$$

vilket blir

$$m^3 + 4(m+1) + 4m^{3/2}\sqrt{m+1} \geq (m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$$

om vi utvecklar kvadraterna och multiplicerar båda leden med 4. För vänsterledet får vi nu

$$\begin{aligned} m^3 + 4(m+1) + 4m^{3/2}\sqrt{m+1} &> m^3 + 4m + 4 + 4m^{3/2}\sqrt{m} \\ &= m^3 + 4m^2 + 4m + 4 \\ &> m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \end{aligned}$$

och därmed har vi visat olikheten. Enligt basfall, induktionssteg och induktionsprincipen gäller därmed olikheten för alla heltral större än eller lika med 2.

7. (a) Följer direkt av att likhet är en ekvivalensrelation.
   (b) $\{2, 11, 20, 101, 110, 200\}$
   (c) Dessa är inte korrekta definitioner. Vi har t ex att $[7] = [16]$ eftersom båda har siffersumman 7. Däremot gäller t ex

$$[7] \oplus [3] = [10] \text{ och } [16] \oplus [3] = [19],$$

men $[10] \neq [19]$ så 'additionsdefinitionen' beror på representanten. På samma sätt beror 'multiplikationen' på representanten för vi har t ex

$$[7] \otimes [7] = [49] \text{ och } [16] \otimes [7] = [112],$$

men $[49] \neq [112]$.

8. Det gäller att visa att $7^{10n+1} + 6^{11n-1} = 0$ i $\mathbb{Z}_{43}$. Eftersom $6 \cdot 7 = 42$ så får vi att $7 \cdot (-6) = -42 = 1$ i $\mathbb{Z}_{43}$, d v s -6 är invers till 7 i $\mathbb{Z}_{43}$. Vi förenklar nu uttrycket genom att förlänga med inversen till 7^{10n+1} som är

$$(-6)^{10n+1} = -\left(6^{10n+1}\right)$$

eftersom $10n + 1$ är udda. Likheten vi ska bevisa är då ekvivalent med

$$0 = -\left(6^{10n+1}\right)\left(7^{10n+1} + 6^{11n-1}\right) = 1 - 6^{21n}$$

i $\mathbb{Z}_{43}$, d v s

$$6^{21n} = 1.$$

Men i $\mathbb{Z}_{43}$ har vi att

$$6^3 = 36 \cdot 6 = (-7) \cdot 6 = -42 = 1,$$

så

$$6^{21n} = \left(6^3\right)^{7n} = 1^{7n} = 1$$

i $\mathbb{Z}_{43}$ vilket var precis det vi skulle visa.