MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2015-08-28.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: John Bondestam Malmberg, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Primtalsfaktorisera $n = 28175$ och beräkna $\Phi(n)$, d v s Eulers phi-funktion av n. (Du måste ange värdet på $\Phi(n)$ som ett heltal för full poäng.) (6p)

2. Bestäm de positiva heltalslösningarna till ekvationen

$$12x + 21y = 186.$$

(6p)

3. Formulera definitionerna av att en funktion är injektiv respektive surjektiv. Ge också ett exempel i vart och ett av följande 4 fall på en funktion $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ som är:

   - injektiv och surjektiv
   - injektiv men inte surjektiv
   - inte injektiv men surjektiv
   - varken injektiv eller surjektiv.

(6p)

4. Vilka av följande två logiska argument är giltiga?

(a)

$$\begin{array}{r} p \to q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \neg(p \wedge q) \\ p \to q \\ q \to s \\ \neg r \\ \hline s \end{array}$$

Om ett argument är giltigt så ge en motivering till det och om det inte är det så ge ett motexempel. (6p)

Var god vänd!

5. Det finns 15 bollar i en påse. Bollarna är numrerade från 1 till 15 så alla är olika. Av bollarna är 10 blå med vit text och de 5 andra är vita med röd text. På hur många sätt kan man välja ut 4 bollar (utan att ta hänsyn till ordningen man väljer dem) om man

   (a) får välja helt fritt.

   (b) ska välja 1 blå och 3 vita bollar.

   (c) ska välja minst 1 blå boll.

   (8p)

6. Visa att det för alla heltal $n \geq 2$ gäller att

$$\frac{1}{2}n^{3/2} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < n^{3/2}.$$

   (6p)

7. Låt $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vara definierad som att $s(n)$ är siffersumman av n, t ex är

$$s(17289) = 1 + 7 + 2 + 8 + 9 = 27.$$

   Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{N}$ genom

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : s(a) = s(b)\}.$$

   (a) Motivera att detta är en ekvivalensrelation på $\mathbb{N}$.

   (b) Låt $[a]$ beteckna ekvivalensklassen av a m a p $\mathcal{R}$. Räkna upp alla tal i mängden

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 1000 \text{ och } n \in [2]\}.$$

   (c) Låt $[a]$ beteckna ekvivalensklassen av a m a p $\mathcal{R}$. Är

$$[a] \oplus [b] := [a + b] \text{ respektive } [a] \otimes [b] := [ab]$$

   korrekta definitioner av operatorer på ekvivalensklasserna? Motivering krävs.

   (6p)

8. Visa att det för varje positivt heltal n gäller att $43 \mid 7^{10n+1} + 6^{11n-1}$. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade senast den 18 september. Tentorna kan därefter avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 11:00 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.