Veckoblad 1, Diskret matematik IT, HT2014

Under första veckans tre föreläsningar går vi igenom kapitel 1 och 2 samt det mesta av kapitel 3. Mycket av detta har ni som gick introduktionskursen redan gått igenom men jämfört med då är det lite fördjupat och utvidgat. Allt gås igenom från grunden, så det kommer inte att förutsättas att man gått introduktionskursen.

Viktiga begrepp och resultat under veckan

- Satslogik med utsagor.
- Logiska operatorerna (konnektiven) konjunktion ("och"), disjunktion ("eller"), negation ("inte"), implikation och ekvivalens.
- Begreppen tautologi, logisk ekvivalens och logisk implikation.
- Begreppet logiskt argument med hypoteser och slutsats.
- Begreppet predikat och kvantorerna $\forall$ ("för alla") och $\exists$ ("det existerar").
- Begreppen mängd, delmängd och äkta delmängd.
- De speciella mängdbeteckningarna $\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$.
- Mängdoperatorerna snitt, union, mängddifferens, komplement och symmetrisk mängddifferens.
- Begreppen kartesisk produkt och potensmängd.
- Begreppen funktion, definitionsmängd, målmängd, bild, värdemängd och graf.
- Funktionsegenskaperna injektiv, surjektiv, bijektiv och inverterbar.
- Sammansättning av funktioner.
- Begreppen binär operator och unär operator.
- Operatorsbegreppen identitet, invers, kommutativ, associativ och involution.
- Summasymbolen och produktsymbolen.

Grundläggande kunskapsmål under veckan

- Göra sanningsvärdestabell för logiska formler.

- Avgöra om logiska formler är ekvivalenta.
- Överföra utsagor i textform till symbolisk logisk form.
- Avgöra om ett logiskt argument är giltigt.
- Negera kvantifierade predikat.
- Avgöra vilka element som ingår i en mängd definierad utifrån egenskaper hos elementen.
- Illustrera mängder med Venn-diagram.
- Beräkna antalet element i en mängd givet information om relationer med andra mängder.
- Avgöra om mängder är lika.
- Bestämma värdemängden för en funktion.
- Avgöra om en funktion är injektiv, surjektiv och/eller bijektiv.
- Avgöra om två funktioner är lika.
- Beräkna sammansättningen av två funktioner.
- Avgöra vilka egenskaper en operator har.

Gruppövningar

1. Universum är mängden $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ av alla naturliga tal. Låt $P(n)$ vara följande predikat
$$P(n) : n \text{ är delbart med 7.}$$
Avgör om vardera av följande påståenden är sanna eller falska
   (a) $P(2)$
   (b) $P(14)$
   (c) $\exists n : P(n)$
   (d) $\forall n : P(n)$
   (e) $\forall n : [P(n) \to \neg P(n+1)]$

2. Bevis eller motexempel krävs som svar på följande två frågor:

   (a) Är $(\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Longrightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ en korrekt logisk härledning?

   (b) Är $(\forall x P(x)) \wedge (\exists x Q(x)) \Longrightarrow \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ en korrekt logisk härledning?

3. Låt “universum” vara mängden av alla båtar i Västköpings hamn. Skriv följande utsagor på symbolisk logisk form och illustrera med hjälp av Euler-diagram (d v s en skiss med potatisformade mängder).

   - Alla segelbåtar är vackra.
   - Alla vackra båtar är gamla.
   - Det finns inga gamla motorbåtar.

   Vad kan du dra för slutsatser? Formulera dina slutsatser i ord och med predikatlogik.

4. Vi definierar en operator $\star$ på $\mathbb{R}^3$ genom

$$(a, b, c) \star (d, e, f) = (a + d, e + af + b, c + f).$$

   (a) Är $\star$ kommutativ?

   (b) Är $\star$ associativ?

   (c) Har $\star$ någon identitet?

   (d) Om $\star$ har identitet, så avgör vilka element som har invers och bestäm inversen i de fall den existerar.