

Veckoblad 2, Diskret matematik IT, HT2014

Viktiga begrepp och resultat under veckan

- Begreppet relation från en mängd till en annan, samt speciellt på en mängd.
- Relationsegenskaperna reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk respektive transitiv.
- Begreppen ekvivalensrelation, ekvivalensklasser och partition och sambandet mellan dessa.
- Begreppen partiell ordning och total ordning.
- Begreppen minimalt element, minsta element, maximalt element och största element i en partiell ordning.
- Induktionsprinciperna
- Rekursivt definierade funktioner

Grundläggande kunskapsmål under veckan

- Visa att en relation är en ekvivalensrelation.
- Bestämma ekvivalensklasserna.
- Visa att en relation är en partiell ordning.
- Bestämma alla minimala, minsta, maximala samt största element för en partiell ordning.
- Bevisa slutna formler för summor med varierande gränser.
- Bevisa slutna formler för rekursiva funktioner.

Kunskapsmål för överbetyg under veckan

- Bevisa mer avancerade utsagor med hjälp av induktion.

Gruppövningar

1. Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd och sätt

$$S = \{(A, B) : A \subseteq B \subseteq X\}.$$

Vi definierar en relation \mathcal{R} på S genom

$$(A, B)\mathcal{R}(C, D) \iff A = B \cap C \text{ och } B \subseteq D.$$

Visa att \mathcal{R} är en partiell ordning på S .

2. Vi definierar en relation \mathcal{R} på \mathbb{R}^2 genom

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \iff (a + b)^2 = (c + d)^2.$$

- (a) Visa att \mathcal{R} är en ekvivalensrelation.
- (b) Skissa i ett koordinatsystem ekvivalensklasserna av $(0, 0)$ och $(1, 1)$ m a p \mathcal{R} .
- (c) Ge en mängd $D \subseteq \mathbb{R}^2$ som innehåller exakt en representant ur varje ekvivalensklass m a p \mathcal{R} .

3. Vi definierar polynomen $P_n(x)$ för $n \in \mathbb{N}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_{n+1}(x) = P_n(x)(x - 1) + x, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

- (a) Beräkna $P_3(x)$.
- (b) Visa att $P_n(3) = 2^{n+2} - 3$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

4. Visa att

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$$

för alla heltal $n > 1$.

5. Visa att

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

för alla heltal $n \geq 2$.