Veckoblad 3, Diskret matematik IT, HT2014

Viktiga begrepp och resultat under veckan

- Aritmetisk summa
- Geometrisk summa
- Motsägelsebevis.
- Begreppen delar och multipel.
- Delbarhet är en partiell ordning på de naturliga talen.
- Om a delar b och c, så delar det också bm+cn för alla heltal m och n.
- Divisionsalgoritmen.
- Begreppen största gemensamma delaren och relativt prima.
- Euklides algoritm för att beräkna största gemensamma delaren.
- Bezouts identitet.
- Begreppen primtal och sammansatt tal.
- Linjära diofantiska ekvationer.

Grundläggande kunskapsmål under veckan

- Beräkna aritmetiska och geometriska summor.
- Avgöra om ett tal delar ett annat.
- Beräkna rest och kvot i divisionsalgoritmen.
- Beräkna största gemensamma delaren med både primtalsfaktorisering och Euklides algoritm och kunna avgöra vilken metod som är bäst i givet läge.
- Använda Euklides utökade algoritm för att bestämma talen i Bezouts identitet.
- Primtalsfaktorisera ett rimligt stort heltal.
- Avgöra om ett rimligt stort tal är primtal.
- Bestämma den allmänna lösningen till en linjär diofantisk ekvation.

Gruppövningar

1. Kan man göra en rektangulär tabell (av godtycklig storlek) med tal på sådant sätt att summan av varje kolumn är större än 15 och summan av varje rad är mindre än 15? Går det med en kvadratisk tabell?

   Har ni använt er av ett motsägelsebevis?

2. (a) Visa (med ett exempel) att förutsättningen att p är ett primtal är *nödvändig* i Sats 5.30.

   (b) Motivera att relationen given av att a är relaterat med b om och endast om $a \mid b$ är en partiell ordning på $\mathbb{N}$ men att den *inte* är det på $\mathbb{Z}$.

3. Diskutera (tills alla i gruppen förstår) varför Euklides algoritm fungerar; dels varför den garanterat tar slut och dels att det den ger verkligen är största gemensamma delaren.

4. Bestäm alla lösningar till följande Diofantiska ekvationer.

   (a) 323x+278y=7

   (b) 579x+921y=5

   Välj också ut den lösning i de båda fallen för vilken $|x| + |y|$ blir minimalt.

5. Låt $F(n)$ vara det n:te Fibonacci-talet.

   (a) Visa att sgd$(F(n), F(n-1)) = 1$ för alla $n > 1$.

   (b) Visa att om man beräknar sgd$(F(n), F(n-1))$ med Euklides algoritm så krävs det alltid exakt $n-3$ steg.

   (c) I själva verket är dessa par av efterföljande Fibonacci-tal de tal som kräver flest steg i förhållande till sin storlek. Kan ni motivera detta?