

Veckoblad 6 + 7, Diskret matematik IT, HT2014

Viktiga begrepp och resultat under veckorna

- Binomialkoefficienter
- Additionsformeln för binomialkoefficienter.
- Binomialsatsen och Pascals triangel.
- Begreppen graf och riktad graf med noder och kanter.
- Begreppen grad, ingrad och utgrad hos en nod.
- Begreppen delgraf och inducerad delgraf.
- Begreppen väg, enkel väg och cykel.
- Begreppen sammanhängande, starkt sammanhängande, maximalt sammanhängande och komponent.
- Begreppen fullständig graf och bipartit graf.
- Begreppet träd.
- Begreppen Eulerväg och Eulercykel.
- Existerar Eulercykel om och endast om varje nod har jämn grad.
- Begreppen relationsgraf och Hassediagram.
- Begreppet grannmatris och sambandet mellan vägar och potenser av matrisen.
- Begreppen isomorfi mellan grafer och isomorfa grafer.

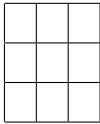
Grundläggande kunskapsmål under veckorna

- Tillämpa binomialsatsen för att utveckla en polynompotens.
- Växla mellan de olika sätten att representera en graf: mängder, ritad och matris.
- Avgöra om en graf är sammanhängande, ett träd, har Eulerväg och/eller Eulercykel, är bipartit.
- Rita relationsgraf för en graf.
- Rita Hassediagrammet för en partiell ordning.
- Beräkna antalet vägar mellan två noder med hjälp av grannmatrisen.

- Avgöra om två grafer är isomorfa och i sådant fall bestämma en isomorfi.

Gruppövningar

1. Ni skall promenera på linjerna i diagrammet nedan.



Hur många direkta vägar finns från det översta vänster hörnet till det nedersta högerhörnet? (Direkta vägar går bara till höger och neråt.) Tips: Ni kan kalla ett steg till höger för H och ett steg neråt för N och räkna ord istället.

Kan ni generalisera till ett diagram med k kolumner och r rader?

2. Låt $G = (V, E)$ vara grafen med noderna $V = \{1, 2, 3, 4\}$ och kanterna

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

- (a) Rita upp grafen.
- (b) Bestäm grannmatrisen.
- (c) Är grafen sammanhängande?
- (d) Är grafen bipartit?
- (e) Använd grannmatrisen för att beräkna antalet vägar av längd 3 respektive längd 4 från 2 till 1. (Kan man använda analysen ni gjorde i förra uppgiften för att lösa en av dessa?)
- (f) Finns det någon Eulercykel eller Eulerväg i grafen?
- (g) Är grafen ett träd?

Tänk på att ni ska ha en tydlig motivering för alla svar ni funnit.

3. Givet ett positivt heltal n låt D_n vara mängden av alla positiva delare till n . Då är $(D_n, |)$ en partiellt ordnad mängd (ni behöver inte visa detta).
 - (a) Rita Hasse-diagrammet för $(D_5, |)$, $(D_{125}, |)$, $(D_{70}, |)$ och $(D_{120}, |)$
 - (b) Låt $n = pqr$ där p , q och r är olika primtal. Rita Hasse-diagrammet för $(D_n, |)$.
 - (c) Försök karakterisera de tal n för vilka $(D_n, |)$ blir ett träd.
4. En Hamiltoncykel i en graf är en cykel som passerar varje nod exakt en gång.
 - (a) Hur många olika Hamiltoncykler finns i den fullständiga grafen med n noder?

- (b) Visa att den fullständiga bipartita grafen $K_{m,n}$ har en Hamiltoncykel om och endast om $m = n$.
5. En *plan graf* är en graf som går att rita på ett plan utan att några kanter korsar varandra.
- (a) Rita några (sammanhängande) plana grafer och räkna antalet noder, kanter, regioner n, k, r (en region är ett sammanhängande område i planet som omringas av grafens kanter).
- (b) Hittar ni något samband mellan $n + r$ och k ?
- (c) Skissa på ett bevis för sambandet. Ni behöver inte ha med alla detaljer, men huvuddragen i beviset. Tips: Prova med induktion över antalet kanter.