Tentamen i Diskret matematik, TMV200, 2016-04-07
Lösningsförslag

1. Avgör, för vart och ett av följande argument, om det är giltigt, antingen med en motivering om så är fallet, eller med ett motextempel om så inte är fallet:

$$\text{(a)}\quad \begin{array}{r} \neg p \\ \neg q \\ p \to r \\ q \to s \\ \hline \neg r \wedge \neg s \end{array} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{r} \neg p \\ \neg q \\ r \to p \\ s \to q \\ \hline \neg r \wedge \neg s \end{array}\ .$$

   Lösning:

   (a) Argumentet är ogiltigt: om exempelvis p och q är falska och r och s är sanna är alla hypoteser uppfyllda men slutsatsen falsk.

   (b) Argumentet är giltigt, ty den tredje hypotesen är ekvivalent med $\neg p \to \neg r$ och den fjärde hypotesen är ekvivalent med $\neg q \to \neg s$, vilka tillsammans med de två första hypoteserna medför $\neg r$ och $\neg s$, varur slutsatsen följer.

2. (a) Formulera Fermats lilla sats, utan bevis.

   (b) Förklara kort hur Fermats lilla sats är ett specialfall av Eulers sats.

   (c) Bestäm den minsta icke-negativa rest som 359^{1201} ger vid division med 13.

   Lösning:

   (a) Om p är ett primtal och a ett positivt heltal ej delbart med p, så är $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

   (b) Eulers sats säger att $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$ för relativt prima positiva heltal m och a med $m > 1$. Om $m = p$ är ett primtal är $\varphi(p) = p - 1$, och varje positivt heltal som inte är delbart med p är relativt primt med p, vilket ger Fermats lilla sats.

   (c) Notera att $1201 = 12 \cdot 100 + 1$, varför

$$359^{1201} = 359 \cdot (359^{12})^{100}.$$

   Då 359 inte är delbart med primtalet 13 gäller att $359^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ enligt Fermats lilla sats, så 359^{1201} ger samma rest som 359 vid division med 13. Då $359 = 27 \cdot 13 + 8$, är svaret alltså 8.

3. Låt $\mathbb{Z}_+$ beteckna mängden av alla positiva heltal. Betrakta funktionen

$$f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Q}, \quad (m, n) \mapsto \tfrac{m}{n}.$$

   Är denna funktion injektiv? Är den surjektiv? Är den bijektiv? Motivera!

   Lösning: Funktionen är inte injektiv, ty t ex $(1, 1) \neq (2, 2)$ i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$, medan $1/1 = 2/2$ i $\mathbb{Q}$. Därför är funktionen inte heller bijektiv. Däremot är funktionen surjektiv, ty varje rationellt tal kan skrivas på formen m/n där m och n är heltal och n är positivt.

4. En kortlek består av 15 kort, varav fem gula kort numrerade från 1 till 5, fem röda kort numrerade från 1 till 5, och fem blå kort numrerade från 1 till 5. Numret på varje kort kallas för kortets *valör*. På hur många sätt kan en spelare ta 4 kort (samtidigt och utan hänsyn till ordning)...

   (a) ...över huvud taget?

   (b) ...om alla kort måste ha olika valör?

   (c) ...om minst två kort ska ha samma valör?

   (d) ...om spelaren ska ha minst ett kort av varje färg?

   Var god vänd!

   Lösning:

   (a) Detta kan göras på

$$\binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4!} = \frac{15 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 24}{24} = 1365$$

   sätt.

   (b) Det finns flera korrekta sätt att resonera. Ett är som följer. Vi väljer först vilken valör av de 5 möjliga som inte ska vara med. Detta kan göras på 5 sätt. Av varje annan valör ska vi nu välja vilken färg kortet i den valören ska ha. Detta kan göras på 3 sätt per valör, oberoende av varandra. Det totala antalet blir $5 \cdot 3^4 = 405$.

   (c) Detta är komplementhändelsen till föregående uppgift, dvs vi söker antalet sätt som inte uppfyller (b). Antalet är således $1365 - 405 = 960$.

   (d) Detta innebär att spelaren ska ha två kort av en viss färg och ett kort av var och en av de andra färgerna. Man kan välja den gemensamma färg som två kort ska ha på 3 sätt. Antalet kort av den färgen kan väljas på $\binom{5}{2} = 10$ sätt, medan det för varje annan färg finns 5 sätt att välja kortet i den färgen. Multiplikationsprincipen ger $3 \cdot 10 \cdot 5^2 = 30 \cdot 25 = 750$ sätt.

5. Visa att det för varje positivt heltal n gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{-k} = 2 - (n+2)2^{-n}.$$

   Lösning: Detta visas enklast med induktion. Basfallet för $n = 1$ är $1/2 = 2 - 3/2$, vilket stämmer. Antag nu att vi visat $\sum_{k=1}^{n} k2^{-k} = 2 - (n+2)2^{-n}$ för ett visst n. Vi ska visa att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^{-k} = 2 - ((n+1)+2)2^{-(n+1)}.$$

   Vi delar upp summan i en del som innehåller de n första termerna, och en del som innehåller den sista termen, och tillämpar induktionsantagandet på den första delen, vilket ger

$$\sum_{k=1}^{n+1} k2^{-k} = \sum_{k=1}^{n} k2^{-k} + (n+1)2^{-(n+1)} = 2 - (n+2)2^{-n} + (n+1)2^{-(n+1)}.$$

vilket, då $2^{-n} = 2 \cdot 2^{-(n+1)}$, är lika med

$$2 - 2(n+2)2^{-(n+1)} + (n+1)2^{-(n+1)} = 2 - (2n+4)2^{-(n+1)} + (n+1)2^{-(n+1)} =$$

$$= 2 - (n+3)2^{-(n+1)} = 2 - ((n+1)+2)2^{-(n+1)}$$

och induktionssteget är klart. Tillsammans med basfallet ger detta enligt induktionsprincipen att påståendet är sant.

6. Betrakta mängden $M = \{a, b, c\}$ som innehåller tre olika element.

   (a) Beskriv alla ekvivalensrelationer på M.

   (b) Beskriv alla partiella ordningar på M som uppfyller att $a \leq b$.

   Du får välja själv hur du vill presentera dessa relationer, så länge ditt sätt är korrekt och otvetydigt.

   Lösning:

   (a) Ekvivalensrelationer svarar mot partitioner av M i ekvivalensklasser. Följande indelningar är möjliga

   $$\{\{a,b,c\}\} \quad \{\{a,b\},\{c\}\} \quad \{\{a,c\},\{b\}\} \quad \{\{b,c\},\{a\}\} \quad \{\{a\},\{b\},\{c\}\}.$$

   (b) Vi vet redan att $a \leq b$, och vi vet också att $a \leq a$, $b \leq b$ och $c \leq c$ och det återstår att reda ut hur c förhåller sig till a och b. Där kan vi få tre olika totala ordningar, nämligen

   $$a \leq b \leq c \quad a \leq c \leq b \quad c \leq a \leq b \ .$$

   Därutöver kan vi ha två partiella ordningar där c är orelaterad till precis ett av a och b, nämligen de partiella ordningar med Hassediagram

   

   och

   

   och slutligen den enda partiella ordning där c är orelaterad till både a och b.

7. Bestäm alla heltal som lämnar rest 1 vid division med 3, rest 2 vid division med 5 och rest 4 vid division med 6. *OBS! Tänk dig för innan du räknar på!*

   Lösning: Observera att 6 och 3 inte är relativt prima, så Kinesiska restsatsen kan inte användas rakt av. Om ett tal n ger rest 4 vid division med 6, ger det dock automatiskt rest 1 vid division med 3, ty då är $n = 6k + 4 = 3(2k+1) + 1$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Därför behöver vi bara ta hänsyn till kongruensen med 2 modulo 5 och med 4 modulo 6. Ett tal som uppfyller dessa kongruenser är $22 = 4 \cdot 5 + 2 = 3 \cdot 6 + 4$. Talen 5 och 6 är relativt prima, och $6 \cdot 5 = 30$, så enligt Kinesiska restsatsen är svaret alla tal på formen $22 + 30m$ med $m \in \mathbb{Z}$.

8. Låt G vara en riktad graf med grannmatris

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

där p antingen är 0 eller 1.

(a) Rita grafen då $p = 0$.

(b) Bestäm, för varje positivt heltal n, antalet vägar av längd n i grafen (då $p = 0$).

(c) Rita grafen då $p = 1$.

(d) Bestäm, för varje positivt heltal n, antalet vägar av längd n i grafen (då $p = 1$).

Lösning:

(a) $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet.$

(b) Det finns fyra vägar av längd 1, tre vägar av längd 2, två vägar av längd 3 och en väg av längd 1.

(c) Grafen är en riktad cykel med fem noder, och ritas som en femhörning med alla kanter riktade t ex medurs.

(d) Det finns fem vägar av längd n för varje n, eftersom det från varje nod kan utgå precis en väg av längd n.

Observera att väg här avser riktad väg.