FÖRSTA VECKOUTMANINGEN

DISKRET MATEMATIK

Denna veckas utmaning handlar om logik och mängdlära och tar också upp frågor inför avsnittet om funktioner.

Problem 1. Alice har fyra kort som vardera har en färg (gul eller röd) på ena sidan och en bokstav (A eller B) på andra. Utan att Bob ser lägger Alice ut dem på ett bord. När Bob får titta ser han framför sig ett gult kort, ett rött kort, ett kort med bokstaven A och ett kort med bokstaven B. Bob ser inte kortens undersidor. Alice påstår att *om ett kort är rött på ena sidan så har det bokstaven B på andra.* Vilket/vilka kort ska Bob vända på för att bevisa eller motbevisa påståendet? Formulera de möjliga utfallen av Bobs vändande på korten i term av giltiga logiska argument med hypoteser och slutsatser (se Kapitel 1).

Problem 2. Låt P och Q vara predikat i ett givet universum U. Betrakta å ena sidan de fyra utsagorna

$$\begin{array}{ll} \forall x : (P(x) \wedge Q(x)) & \forall x : (P(x) \vee Q(x)) \\ \exists x : (P(x) \wedge Q(x)) & \exists x : (P(x) \vee Q(x)) \end{array}$$

och å andra sidan de fyra utsagorna

$$\begin{array}{ll} (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x)) & (\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x)) \\ (\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x)) & (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x)) \end{array}$$

Vilka logiska implikationer och ekvivalenser finns det mellan de fyra första och de fyra sista utsagorna? Hur kan man visa de som är sanna? Vilka val av U, P och Q är lämpliga för att hitta motexempel i de fall logisk implikation/ekvivalens inte gäller?

Problem 3. Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definieras genom

$$f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{om } n \text{ är jämnt,} \\ (n+1)/2 & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

Beräkna $f(n)$ för $0 \leq n \leq 10$. Hur många naturliga tal avbildas på (dvs skickas till) varje heltal? Finns det något heltalsvärde som funktionen inte antar? Vad säger detta om "antalet" heltal i förhållande till "antalet" naturliga tal? Argumentera och använd gärna begrepp från funtkionskapitlet när du lärt dig dem.

Problem 4. På mängden av alla naturliga tal mindre än 1 000 utförs operationen *addition utan minne* som följer. Man ställer upp additionen och räknar som vanligt (dvs i bas 10), men utan att hålla något i minnet. Exempelvis blir 567+815=372 (7+5=12; vi skriver 2 och har *inte* 1 i minnet. Sedan blir 6+1=7. Slutligen är 5+8=13; vi skriver 3 och har *inte* 1 i minnet). Prova att räkna ett par sådana additioner så att du vänjer dig. Är denna operation associativ? Kommutativ? Har den ett enhetselement? (Begreppen kan du slå upp i Kapitel 3). Finns det inverser till några element? Skulle du kunna beskriva den operationen på ett annat sätt?