ANDRA VECKOUTMANINGEN

DISKRET MATEMATIK

Nu avslutar vi avsnittet om funktioner och går in på relationer och vidare till induktion.

Problem 1. Är sammansättningen av två injektiva funktioner injektiv? Bevis eller motexempel! Om två funktioner har en sammansättning som är injektiv, följer det då att den första funktionen är injektiv? Följer det att den andra är injektiv? Bevis eller motexempel! Om ni får tid över, ersätt ordet injektiv med ordet surjektiv och upprepa.

Problem 2. En relation kan ju vara reflexiv, symmetrisk och transitiv. För varje kombination av dessa tre egenskaper, ange en mängd A och en relation R på A sådan att R uppfyller just den kombinationen (t ex att R är symmetrisk men varken reflexiv eller transitiv, eller reflexiv och symmetrisk men inte transitiv, osv). Notera att man i vissa fall kan använda en "naturlig" operation, medan i andra måste man använda definitionen av en relation. Diskutera även giltigheten i följande argument (varning för hjärnvridande kuggfråga):

"Om R är symmetrisk och transitiv, så är den automatiskt också reflexiv, ty om xRy så gäller även yRx pga symmetri, och transitivitet ger $xRy \wedge yRx \Rightarrow xRx$. Alltså gäller xRx, dvs reflexivitet!"

Problem 3. Betrakta relationerna $\preceq$ och $\trianglelefteq$ på mängden $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definierade enligt

$$(a, b) \preceq (c, d) \Longleftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$$

och

$$(a, b) \trianglelefteq (c, d) \Longleftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d).$$

Verifiera att de är partiella ordningar. Är någon av dem en total ordning? Gäller $(a, b) \preceq (c, d) \Rightarrow (a, b) \trianglelefteq (c, d)$? Gäller det omvända? (Bevis eller motexempel i varje fall). Finns det något minsta/största element med avseende på någon av dem? Diskutera när den ena eller den andra är lämpligare att använda! Ordningen $\trianglelefteq$ kallas för den *lexikografiska ordningen*. Kan ni gissa varför? Diskutera om man kan generalisera den bortom *par* av tal.

Problem 4. Alla människor har samma hårfärg! Detta kan vi visa med induktion, genom att visa att för varje positivt heltal n har varje grupp om n människor samma hårfärg. För $n = 1$ är påståendet uppenbart. Antag att vi visat det för ett visst n. Givet en grupp om $n + 1$ människor, kan vi ta ut en människa. Resterande n har enligt induktionsantagandet samma hårfärg sinsemellan. Låt den uttagna människan komma in igen, och tag ut en annan. Återigen har de n som är kvar samma hårfärg. Sammantaget har därför alla $n + 1$ människor samma hårfärg. Enligt induktionsprincipen gäller detta för varje n, så det följer att alla människor har samma hårfärg. Diskutera!