TREDJE VECKOUTMANINGEN

DISKRET MATEMATIK

Vi lämnar induktion och rekursion och går in på delbarhet, division och primtal.

Problem 1. Fibonacciföljden $F(1), F(2), \ldots$ ges rekursivt av $F(1) = F(2) = 1$ och $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ för alla $n \geq 3$. Vi ska nu härleda en sluten formel för följden, genom att visa att för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller

$$F(n) = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$$

där a och b är två specifika konstanter.

(1) Bestäm vad a och b måste vara för att formeln ska gälla för $F(1)$ och $F(2)$.
(2) Räkna även ut $a+1$, $b+1$, a^2 och b^2.
(3) Genomför induktionsbeviset. *Ledning: använd lämpliga slutsatser från (2).*

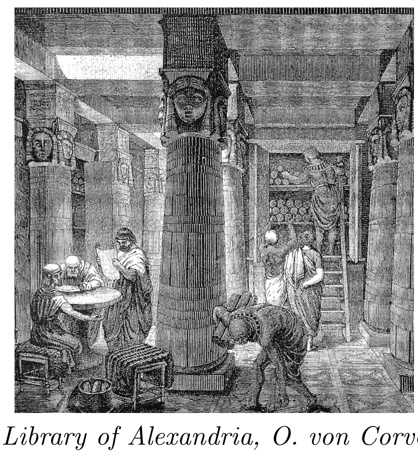
Problem 2. Betrakta relationen $|$ (dvs "delar") på mängden $\mathbb{Z}$. Är den en partiell ordning? Vad händer om vi ersätter $\mathbb{Z}$ med $\mathbb{N}$? Vad händer om vi ersätter $\mathbb{Z}$ med $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$? I de fall där det är en partiell ordning, undersök om det finns minimala, maximala, minsta respektive största element, och ange vilka dessa i så fall är.

Problem 3. Vilka två av följande påståenden är giltiga på mängden av alla heltal? Bevisa dem!

$$a|b \Rightarrow a^2|b^2, \qquad a|c \wedge b|c \Rightarrow ab|c, \qquad a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c, \qquad 6|(a+1) \Rightarrow 6|(a^2+5).$$

För de falska påståendena, ge motexempel och diskutera kort om de kan bli sanna under lämpliga villkor på a, b och c. (Det finns flera möjliga resonemang!)

Problem 4. Om biblioteket i Alexandria berättas kanske följande: biblioteket hade vi något tillfälle precis så många böcker, att om de skulle fördelas på 83 hyllor med lika många böcker på varje hylla, så skulle en bok bli över, medan om de skulle fördelas på 47 hyllor med lika många böcker på varje hylla, så skulle tre böcker bli över. Hur många böcker kan det minst ha funnits i biblioteket vid det tillfället?



The Great Library of Alexandria, O. von Corven, 1880-tal