SJÄTTE VECKOUTMANINGEN

DISKRET MATEMATIK

Denna veckas utmaning handlar om grafteori.

Problem 1. På föreläsningen visade vi att en graf G med n noder har en Eulercykel om och endast om vissa villkor om gradtal är uppfyllda. Gå igenom beviset och försök generalisera det till fallet där G är en *multi*graf. Utred även vad G isåfall måste uppfylla för att ha en Eulerväg som inte är en Eulercykel.

Problem 2. Betrakta

(1) relationen $|$ på $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definierad som vanligt,
(2) relationen $\preceq$ på $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, def. som i Andra veckoutmaningen,
(3) relationen $\trianglelefteq$ på $\{1, 2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, def. som i Andra veckoutmaningen,
(4) relationen $\subseteq$ på $\mathcal{P}(A)$ där $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Vi har sett att de är partiella ordningar. Beräkna relationsmatrisen (dvs relationsgrafens grannmatris) och rita Hassediagrammet för var och en av dessa. Fundera över vad diagrammet säger om huruvida ordningarna är totala, samt vilka minimala/maximala/minsta/största element det finns. Gör om detta för relation (1) sedan talet 1 tagits bort från mängden, samt för relation (4) på mängden $\mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Problem 3. Betrakta relationen $<$ på mängden $\{1, 2, 3, 4\}$. Bestäm dess relationsmatris M. Beräkna även M^2, M^3 och M^4. Kan du tolka dessa tre matriser som relationsmatriser för några relationer som kan uttryckas i term av $<$? Vilka? Gör om frågan för relationen $\leq$ på samma mängd.

Ledning. Att bekanta sig med matrismultiplikationen är en del av denna uppgift. Se baksidan!

Problem 4. Betrakta grafen $G = (V, E)$, definierad som följer: V är mängden vars element är följande spårvagnshållplatser: Brunnsparken, Centralstationen, Chalmers, Gamlestadstorget, Hjalmar Brantingsplatsen, Järntorget, Korsvägen, Linnéplatsen och Redbergsplatsen; och för $x, y \in V$ gäller att $\{x, y\} \in E$ om och endast om man kan resa från x till y med spårvagn utan att byta vagn och utan att passera något annat $z \in V$ (men det är tillåtet att passera hållplatser som inte ingår i V)[1]. Rita grafen G och bestäm dess grannmatris.

Finns det något sätt att ta sig från Redbergsplatsen till Järntorget om jag bara passera/byta i en hållplats i V? Om jag bara får passera/byta i två? Kan den informationen fås via matrisen? Kontrollera! Finns det någon Eulerväg eller Eulercykel?

Ändras något av ovanstående svar om Västtrafik lägger ner Linje 6? Hur?

[1] Linjekarta finns på www.vasttrafik.se.

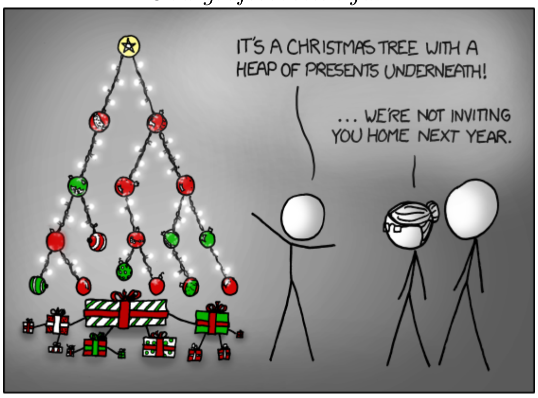
Något om matrismultiplikation. Produkten PQ av två $(n \times n)$-matriser P och Q är den $(n \times n)$-matris vars element på plats (i, j) (dvs på rad i, kolumn j) är lika med

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{kj},$$

där p_{ik} är elementet på plats (i, k) i P och q_{kj} är elementet på plats (k, j) i Q. Ett sätt att se på detta är att lägga den $j$te kolumnen i Q på den $i$te raden i P, multiplicera de element som hamnar på varandra, och addera dessa produkter.

VARNING! Matrismultiplikation är inte kommutativ, så i allmänhet är $PQ \neq QP$! Den är däremot associativ, så P^3 kan du beräkna som $P^2 P$, osv.

God grafteoretisk jul!



Källa: xkcd.com