TMV200 Diskret Matematik

Övningstentamen december 2016

(betygsgränser: 3 för minst 20 poäng, 4 för minst 30 poäng och 5 för minst 40 poäng. Bonuspoäng för duggor räknas in)

1. Låt $Q(x, y, z)$ vara predikatet $x \equiv y \ (mod\ z)$ där x, y, z är heltal, $z \geq 1$
   Avgör vilka av följande påståenden som är sanna. (4p)

   a. $\forall x \forall y \forall z\ Q(x, y, z)$
   b. $\forall x \forall y \exists z\ Q(x, y, z)$
   c. $\exists x \forall y \forall z\ Q(x, y, z)$
   d. $\forall y \forall z \exists x\ Q(x, y, z)$

2. Låt M vara en mängd med n element. Vi betraktar funktioner $f: M \times M \to M \times M$

   a. Hur många sådana funktioner finns det? (2p)
   b. Hur många sådana injektiva funktioner finns det? (2p)
   c. Vi kallar en funktion f ***undvikande*** om det för alla $(a, b) \in M \times M$ gäller att om $f(a, b) = (c, d)$ gäller att $c \neq a, c \neq b, d \neq a, d \neq b$.
      Hur många undvikande funktioner finns det? (4p)

3. Visa med induktion att n linjer i planet delar in planet i $\frac{n^2+n+1}{2}$ områden.
   Vi antar att inga två linjer är parallella och att inga tre linjer har en gemensam skärningspunkt. (6p)

4. Låt R och S vara antisymmetriska relationer från en mängd A till sig själv.
   Avgör om
   a. $R \cap S$ är antisymmetrisk. (3p)
   b. $R \cup S$ är antisymmetrisk. (4p)

5. Betrakta 8 bitar långa strängar av nollor och ettor.

    a. Hur många sådana strängar finns det med exakt tre nollor? (2p)
    b. Hur många sådana strängar finns det med exakt tre nollor och alla nollor i följd? (3p)
    c. Hur många sådana strängar finns det med exakt tre nollor där inga två nollor står intill varandra? (3p)

6.
    a. För vilka n innehåller K_n en Eulercykel?
    (K_n är som vanligt den fullständiga grafen med n noder) (2p)

    b. För vilka n och m innehåller $K_{n,m}$ en Eulercykel?
    ($K_{n,m}$ är som vanligt den fullständiga bipartita grafen med n noder i den ena delmängden och m i den andra). (3p)

7. Bestäm alla positiva heltal n sådana att $\Phi(2n) = \Phi(n)$
(Φ är Eulers funktion: antalet k, $1 \leq k \leq n$ med k och n relativt prima.) (6p)

8. Ackermans funktion $A(m,n)$ kan definieras på följande sätt:

$$\begin{cases} A(0,n) & = & n+1 \\ A(m,0) & = & A(m-1,1) \\ A(m,n) & = & A\big(m-1, A(m,n-1)\big) \end{cases}$$

där $m \geq 1, n \geq 1$ i den sista ekvationen.

Visa att $A(1,n) = n+2$ för alla $n \geq 1$ (6p)