Diskret matematik lp 2, 2016

En samling tänkbara tentamensuppgifter

1. Låt $Q(x,y,z)$ vara predikatet $x^2 + y^2 \geq z^2$ (x,y,z är reella tal). Vilka av följande påståenden är sanna?

    a. $\forall x \forall y \forall z\, Q(x,y,z)$
    b. $\forall x \forall y \exists z\, Q(x,y,z)$
    c. $\forall z \exists y \exists x\, Q(x,y,z)$
    d. $\forall y \forall z \exists x\, Q(x,y,z)$

2. Visa att $n^3 + 2n$ är delbart med 3 för varje positivt heltal *n*.

3. Låt x vara ett reellt tal $\neq 0$ och anta att $x + \frac{1}{x}$ är ett heltal. Visa med induktion att $x^n + \frac{1}{x^n}$ är ett heltal för alla heltal $n \geq 1$

4. På hur många olika sätt kan *n* bollar placeras i tre urnor om den första skall innehålla *k* bollar, den andra *i* bollar och den tredje *m* bollar där $k + i + m = n$?

5. Hur många ord kan man bilda av NOLLKOLL?

6. Anta att *n* och *k* är positiva heltal med $n > k$, och anta att $n! + k$ är ett primtal. Vad kan man säga om *n* och *k*?

7. Bestäm koefficienten till $x^{15}y^8$ i utvecklingen av $(x^3 - 4y^2)^9$

8. Avgör om följande argument är giltigt:

$$\begin{array}{lc} & p \wedge q \wedge r \;\longrightarrow s \\ & \neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ hypoteser & p \vee q \;\longrightarrow r \\ & \neg p \vee r \;\rightarrow q \\ slutsats & s \end{array}$$

9. Doris har gjort en lång resa. Med båt färdades hon 720 km per dygn, övriga dagar färdades hon 400 km per dygn. Sammanlagt gick resan över 15200 km.
Hur många dygn tog resan?

10. Bestäm alla *x* sådana att $\begin{cases} x \equiv 2 \ \ (mod\ 11) \\ x \equiv 7\ (mod\ 19) \end{cases}$

11. Hur många lösningar finns det till ekvationen $x + y + z = n$ om x, y, z och n alla är heltal ≥ 0?

12. Låt A vara en mängd med 2 element och B en mängd med *n* element, $n \geq 2$.

    a. Hur många injektiva funktioner från A till B finns det?
    b. Hur många surjektiva funktioner från B till A finns det?

13. Låt $n \geq 2$ vara ett heltal och $\mathbb{Z}_n$ vara mängden av alla heltal modulo *n*. Definiera en relation *R* på $\mathbb{Z}_n$ enligt: aRb om det finns ett $x \neq 0$ så att $ax \equiv b\ (mod\ n)$.
    För vilka *n* är *R* en ekvivalensrelation?

14. På periferin av en cirkel placeras lika många stjärnor som julgransljus men utan särskild ordning. Visa att man alltid kan hitta en utgångspunkt på periferin så att då man rör sig motsols kommer man i varje givet ögonblick ha passerat minst lika många stjärnor som ljus.

15. Låt *R* vara en symmetrisk relation. Är det säkert att även R^2 är symmetrisk?

16. Hur många olika grafer med 4 noder finns det som är
    a. Sammanhängande?
    b. Ett träd?

17. Definiera följden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ så att $a_1 = 1$ och för alla $n \geq 2$ gäller att $a_n = \sqrt{1 + a_{n-1}^2}$. Visa att $a_n = \sqrt{n}$ för alla $n \geq 1$.

18. I ett RSA-krypto har man valt $n = 77$ och $e = 13$. Bestäm e^{-1}